



## Localization of ground emitters using LEO satellites in LER scenario based on combined TDOA-FDOA method

B. Bonyadi<sup>1</sup>, H. Arezumand<sup>2</sup>, H.R. Khodadai<sup>3\*</sup>

Associate Professor, Imam Hossein University (AS), Tehran, Iran.

(Received: 2024/06/11, Revised: 2024/07/26, Accepted: 2024/08/13, Published: 2024/08/31)

DOR:

### ABSTRACT

Knowing the location of the emitter is essential in almost all electronic warfare systems. This article studies and investigates methods of emitter localization using satellites. In emitter localization based on combined TDOA-FDOA measurements, Linear Least Squares (LLS) estimation is widely used due to its computational efficiency. Two-stage weighted least squares and constrained weighted least squares are common LLS methods, but their performance decreases significantly under Large Equal Radius (LER) scenarios, which is a common geometry in satellite-based localization. In this scenario, conventional localization methods often face ill-conditioned matrix problems. In addition, these methods suffer from problems such as high complexity or complex root selection strategy. In the LER scenario, the equations of the combined TDOA-FDOA measurements are linearized using a geometric approach. Linear equations provide the possibility of using weighted least squares estimation to obtain a closed-form solution for the emitter location. This technique does not require initial guess, auxiliary variable, two-stage estimation and complex root selection strategies. In this method, the estimation bias caused by LER modeling is significant in the absence of measurement noise and in weak LER conditions; which it can be compensated and by establishing a strong LER condition, an unbiased estimator can be obtained, ultimately. By analyzing and evaluating the performance of the proposed estimator theoretically, it is shown that the covariance matrix of the emitter location error reaches the Cramér-Rao Lower Bound (CRLB) in strong LER conditions. The simulation results show that the proposed algorithm reaches CRLB in a wider range of measurement noise range with lower run time and complexity compared to other conventional methods.

**Keywords:** Passive satellite positioning, Large Equal Radius scenario, Time Differences Of Arrival, Frequency Differences Of Arrival, Weighted Least Squares.

This article is an open-access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license.

Publisher: Imam Hussein University



\*Corresponding Author Email: hkhddadi@ihu.ac.ir

## مکان یابی تابشگرهای زمینی با استفاده از ماهواره‌های LEO در سناریوی LER مبتنی بر روش ترکیبی TDOA-FDOA

، بهمن بنیادی<sup>۱</sup>، حمید آرزومند<sup>۲</sup>، حمیدرضا خدادادی<sup>۳\*</sup>

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد ۲- استادیار ۳- دانشیار، دانشگاه جامع امام حسین (ع)، تهران، ایران.

(دریافت: ۱۴۰۳/۰۳/۲۲، بازنگری: ۱۴۰۳/۰۵/۰۵، پذیرش: ۱۴۰۳/۰۵/۲۳، انتشار: ۱۴۰۳/۰۶/۱۰)

DOR:



\* این مقاله یک مقاله با دسترسی آزاد است که تحت شرایط و ضوابط مجوز Creative Commons Attribution (CC BY) توزیع شده است.

ناشر: دانشگاه جامع امام حسین (ع) نویسندگان

### چکیده

دانستن مکان تابشگر تقریباً در تمام سامانه‌های جنگ الکترونیک بسیار ضروری است. این مقاله، به مطالعه و بررسی روش‌های مکان‌یابی تابشگر با استفاده از ماهواره‌ها می‌پردازد. در مکان‌یابی تابشگر مبتنی بر اندازه‌گیری‌های ترکیبی TDOA-FDOA، تخمین حداقل مربعات خطی (LLS) به دلیل کارایی محاسباتی، به طور گسترده استفاده می‌شود. حداقل مربعات وزنی دومرحله‌ای و حداقل مربعات وزنی محدود از روش‌های رایج LLS هستند؛ اما عملکرد آن‌ها در سناریوی شعاع‌های برابر بزرگ (LER) که یک هندسه متداول در مکان‌یابی ماهواره‌ای است، به طور قابل توجهی کاهش می‌یابد. در این سناریو، اغلب روش‌های مرسوم مکان‌یابی با مشکل بدحالتی ماتریس‌ها مواجه می‌شوند. علاوه بر آن، این روش‌ها دارای مشکلاتی از قبیل پیچیدگی بالا و یا استراتژی انتخاب ریشه پیچیده هستند. در سناریوی LER، معادلات اندازه‌گیری‌های ترکیبی TDOA-FDOA با یک رویکرد هندسی به صورت خطی تقریب زده می‌شوند. معادلات خطی، امکان استفاده از تخمین حداقل مربعات وزنی، برای داشتن یک پاسخ فرم بسته از مکان تابشگر را فراهم می‌کند. این تکنیک به حدس اولیه، متغیر کمکی، تخمین دومرحله‌ای و استراتژی انتخاب ریشه پیچیده نیاز ندارد. در این روش، بایاس تخمین ناشی از مدل‌سازی LER در غیاب نویز اندازه‌گیری و در شرایط LER ضعیف، قابل توجه است؛ اما می‌توان آن را جبران کرد و با ایجاد شرایط LER قوی، در نهایت یک تخمین گر ناریب به دست آورد. با تحلیل و ارزیابی عملکرد تخمین گر پیشنهادی از نظر تئوری، نشان داده می‌شود که ماتریس کوواریانس خطای مکان تابشگر در شرایط LER قوی، به کران پایین کرامر - راثو (CRLB) می‌رسد. نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد، الگوریتم پیشنهادی با زمان اجرا و پیچیدگی کمتر نسبت به سایر روش‌های مرسوم، در بازه نویز اندازه‌گیری وسیع‌تری به CRLB می‌رسد.

**کلیدواژه‌ها:** مکان‌یابی ماهواره‌ای غیرفعال، شعاع‌های برابر بزرگ، اختلاف زمان‌های رسیدن، اختلاف فرکانس‌های رسیدن، حداقل مربعات وزنی

### ۱- مقدمه

است. عملکرد MLE به CRLB می‌رسد، اما برای تضمین همگرایی پاسخ به راه‌حل بهینه، به جستجوی جامع شبکه یا حدس اولیه خوب، هنگام پیاده‌سازی با روش‌های تکراری دارد؛ بنابراین هزینه محاسباتی آن برای کاربردهای بلادرنگ بسیار زیاد است؛ همچنین اغلب به دست آوردن حدس اولیه خوب از مکان تابشگر در سناریوهای مکان‌یابی عملی، دشوار است. الگوریتم LLS از نظر محاسباتی نسبتاً ساده‌تر است اما از نظر عملکردی ممکن است از CRLB فاصله زیادی داشته باشد. تعادل بین عملکرد و پیچیدگی محاسباتی منجر به توسعه راه‌حل‌ها به روش‌هایی مانند بسط تیلور [۳]، حداقل مربعات وزنی محدود (CWLS) [۴-۶] و روش حداقل مربعات وزنی دومرحله‌ای (TSWLS) [۷-۹] شد. روش TSWLS با معرفی متغیر کمکی

یکی از روش‌های رایج مکان‌یابی تابشگر، استفاده از اندازه‌گیری‌های ترکیبی اختلاف زمان‌های رسیدن (TDOA) و اختلاف فرکانس‌های رسیدن (FDOA) سیگنال تابشگر در چندین حسگر مجزا است که در اطراف تابشگر توزیع شده‌اند. به دلیل غیرخطی بودن معادلات این اندازه‌گیری‌ها نسبت به مکان تابشگر، اغلب دستیابی به راه‌حل بهینه دشوار است. تحقیقات زیادی برای حل این مشکل انجام شده است و الگوریتم‌های مکان‌یابی TDOA-FDOA متعددی، مانند MLE<sup>۱</sup> [۱] و LLS<sup>۲</sup> [۲] پیشنهاد شده

hkhadi@ihu.ac.ir

\* رایانامه نویسنده مسئول:

<sup>2</sup> Time Differences Of Arrival

<sup>3</sup> Frequency Differences Of Arrival

<sup>4</sup> Maximum Likelihood Estimator

<sup>5</sup> Linear Least Squares

<sup>6</sup> Cramer-Rao Lower Bound

<sup>7</sup> Constrained Weighted Least Squares

<sup>8</sup> Two step Weighted Least Squares

هندسی، امکان توسعه راه حل مکان یابی بدون نیاز به مجذور کردن اندازه گیری ها و پردازش دومرحله ای را ممکن می سازد. این مسئله منجر به بهبود عملکرد در سطح نویزهای بالاتر نیز می شود. در این روش، معادلات TDOA حاصل به صورت خطی به مکان تابشگر ناشناخته وابسته هستند. رابطه خطی، امکان استفاده از روش WLS را برای تخمین مکان تابشگر فراهم می کند. تخمین گر مسئله نیازی به حدس اولیه از مکان تابشگر و متغیر کمکی ندارد. در مقایسه این روش با دیگر روش ها بیان شده است که تخمین گر پیشنهادی دو تا سه برابر سریع تر از روش های DMVLS و SCWLS است و در شرایط LER ضعیف عملکرد قوی تری نسبت به DMVLS دارد.

در سال ۲۰۱۸، شی لی و همکاران [۱۴] بیان کردند که هزینه محاسباتی روش سسالی و هو برای کاربردهای بلادرنگ، به ویژه زمانی که تعداد حسگرها افزایش می یابد، زیاد است. آن ها این موضوع را انگیزه خود برای توسعه روش قبلی عنوان کردند و یک راه حل فرم بسته جدید و ساده تر را برای مکان یابی تابشگر با استفاده از اندازه گیری های TDOA در سناریوی LER ارائه دادند. بایاس ناشی از مدل سازی LER در این روش بیش تر از روش قبلی است؛ اما نشان داده می شود با تصحیح بایاس و به روزرسانی نقطه مرجع، درحالی که این روش از نظر مفهومی و محاسباتی ساده تر است، می تواند تحت نویز اندازه گیری کوچک و شرایط LER قوی به CRLB برسد.

در این مقاله، با اضافه کردن معادلات اندازه گیری های FDOA به TDOA، یک راهکار جدید برای حل معادلات مکان یابی تابشگرهای زمینی در سناریوی LER ارائه می شود. راه حل پیشنهادی در شرایط LER قوی، دقیق است؛ اما هنگامی که شرایط LER ضعیف است، با استفاده از راهکار کاهش بایاس ارائه شده، شرایط LER بهبود می یابد و الگوریتم جواب دقیقی ارائه می دهد. روش پیشنهادی، دچار مشکل بدحالتی ماتریس ها نمی شود، به متغیر کمکی و حدس اولیه نیازی ندارد و می تواند با پیچیدگی محاسباتی کمتری، در محدوده نویز وسیع به دقت CRLB برسد.

ادامه مقاله بدین صورت سازمان دهی شده است. در بخش دوم، روابط مربوط به سناریوی مکان یابی و مدل سازی اندازه گیری های ترکیبی TDOA-FDOA بیان می شوند. بخش سوم، پاسخ فرم بسته الگوریتم پیشنهادی و تحلیل بایاس تخمین ناشی از مدل سازی LER را ارائه می دهد. در بخش چهارم، عملکرد الگوریتم پیشنهادی از لحاظ تئوری با CRLB مقایسه می شود و در مورد پیچیدگی محاسباتی روش پیشنهادی بحث می شود. بخش پنجم، حاوی مطالب مربوط به شبیه سازی های انجام گرفته است. در پایان، نتایج حاصل از تجزیه و تحلیل روابط تئوری و شبیه سازی ها در بخش ششم ذکر شده اند.

از تخمین دومرحله ای استفاده می کند. روش CWLS، علاوه بر استفاده از تخمین دومرحله ای با افزودن قیدهای محدودیت به مسئله بر پیچیدگی راه حل مکان یابی می افزاید. در حالت کلی، اگر نویز گوسی به اندازه کافی کم باشد و پیکربندی ماهواره ها در یک راستا نباشد، تفاوت کمی بین عملکرد روش های مختلف وجود دارد [۱۰]؛ اما یکی از چالش های روش های عنوان شده این است در برخی از کاربردهای مکان یابی، حسگرها ممکن است به گونه ای مستقر شوند که فاصله یکسان یا تقریباً یکسانی از مکان تابشگر داشته باشند. یکی از موارد کاربردی آن، مکان یابی یک تابشگر روی زمین با استفاده از چند ماهواره است که می توانند در یکی از مدارهای مختلف زمین قرار بگیرند. به طور رسمی، چنین شرایطی به عنوان سناریوی شعاع های برابر بزرگ (LER<sup>۱</sup>) در مکان یابی ماهواره ای و یا سناریوی آرایه دایره ای یکنواخت (UCA<sup>۲</sup>) در مکان یابی با استفاده از حسگرهای زمینی شناخته می شود [۵، ۱۱]. در این سناریوها به دلیل اندازه گیری های یکسان یا تقریباً یکسان، تمام مقادیر TDOA و FDOAها به صفر میل می کنند؛ به همین دلیل بعضی از ماتریس ها با مشکل تکینگی<sup>۳</sup> یا بدحالت شدن<sup>۴</sup> روبه رو می شوند. دترمینان ماتریس های بدحالت به صفر میل می کند؛ این مورد باعث می شود که اغلب روش های بیان شده که از معکوس شدن این ماتریس ها استفاده می کنند، جواب غیردقیق داشته باشند و یا اصلاً جوابی ارائه ندهند.

برای غلبه بر چالش های مکان یابی در سناریوهای LER و UCA، رومرو و همکاران [۱۲] روش DMVLS<sup>۵</sup> را پیشنهاد دادند؛ اما DMVLS به یک حدس اولیه خوب از مکان تابشگر نیاز دارد و برای اندازه گیری های زمان رسیدن (TOA<sup>۶</sup>) ارائه شده است که با مشکلات زیادی در مکان یابی غیرفعال روبه رو است. از سوی دیگر، لین و همکاران [۵]، یک نسخه بهبود یافته از CWLS، به نام SCWLS<sup>۷</sup> را برای مکان یابی تابشگر در این شرایط ارائه دادند که این روش با استفاده از متغیر کمکی و جدا کردن معادلات، به تخمین مکان تابشگر می پردازد. حتی اگر هر دو روش بتوانند در نویز اندازه گیری گوسی کوچک، به عملکرد بهینه برسند؛ آن ها چندین ریشه از یک چندجمله ای را ارائه می دهند که برای انتخاب ریشه مناسب به استراتژی های انتخاب ریشه پیچیده نیاز است که زمان و انرژی زیادی مصرف می کند. در سال ۲۰۱۶، سسالی و هو [۱۳] توانستند با یک رویکرد هندسی به مسئله، معادلات TDOA را تقریب بزنند. رویکرد

<sup>۱</sup> Large Equal Radius

<sup>۲</sup> Uniform Circular Array

<sup>۳</sup> Singularity

<sup>۴</sup> Ill condition

<sup>۵</sup> Dual root Minimum Variance Least Squares

<sup>۶</sup> Time of arrival

<sup>۷</sup> Separated Constrained Weighted Least Squares

حسگر  $i$ ام تا تابشگر مطابق با رابطه (۱) است.

$$r_i = \|\mathbf{s}_i - \mathbf{u}\| \quad (1)$$

$$= \sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2}$$

نرخ تغییرات  $r_i$  با  $\dot{r}_i$  نشان داده می‌شود و مطابق رابطه (۲) بیان می‌شود.

$$\dot{r}_i = \frac{(\mathbf{s}_i - \mathbf{u})^T \dot{\mathbf{s}}_i}{r_i} \quad (2)$$

فاصله حسگر  $i$ ام تا مبدأ  $R_i = \|\mathbf{s}_i\|$  است و نرخ تغییرات آن با  $\dot{R}_i$  در رابطه (۳) نشان داده می‌شود.

$$\dot{R}_i = \|\dot{\mathbf{s}}_i\| = \frac{\mathbf{s}_i^T \dot{\mathbf{s}}_i}{R_i} \quad (3)$$

با فرض حسگر یکم به‌عنوان حسگر مرجع و تعریف  $c$  به‌عنوان سرعت نور، معادلات اندازه‌گیری TDOA مطابق رابطه (۴) است.

$$cTDOA_{i1} = r_i - r_1 = r_{i1}, \quad i = 2, \dots, M \quad (4)$$

با تعریف  $\lambda = c / f_c$  به‌عنوان طول‌موج و  $f_c$  فرکانس مرکزی، معادلات اندازه‌گیری FDOA، به‌صورت رابطه (۵) به دست می‌آید.

$$\lambda FDOA_{i1} = \dot{r}_i - \dot{r}_1 = \dot{r}_{i1}, \quad i = 2, \dots, M \quad (5)$$

بردار اندازه‌گیری‌های بدون نویز TDOA و FDOA به‌ترتیب

$$\mathbf{r}^o = [r_{21}^o, r_{31}^o, \dots, r_{M1}^o]^T \quad \text{و} \quad \mathbf{r}^o = [r_{21}^o, r_{31}^o, \dots, r_{M1}^o]^T$$

در نظر گرفته می‌شوند، در این صورت می‌توان روابط (۶) و (۷) را برای مدل‌سازی اندازه‌گیری‌های نویزی TDOA و FDOA به‌صورت زیر بیان کرد.

$$\mathbf{r} = [r_{21}, r_{31}, \dots, r_{M1}]^T = \mathbf{r}^o + \mathbf{n}_r \quad (6)$$

$$\dot{\mathbf{r}} = [\dot{r}_{21}, \dot{r}_{31}, \dots, \dot{r}_{M1}]^T = \dot{\mathbf{r}}^o + \mathbf{n}_{\dot{r}} \quad (7)$$

که در آن‌ها  $\mathbf{n}_r = [n_{r,21}, n_{r,31}, \dots, n_{r,M1}]^T$

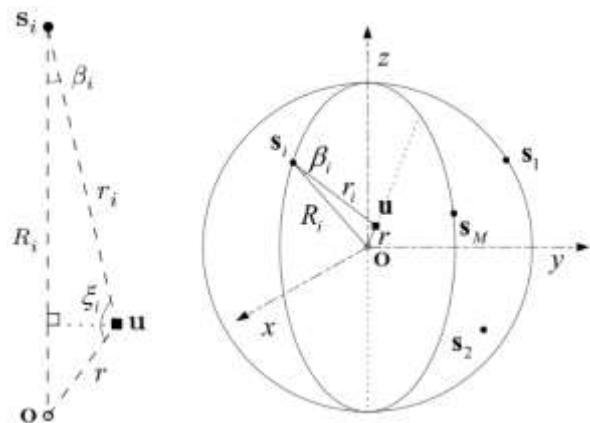
به‌ترتیب بردار نویز گوسی اندازه‌گیری‌های TDOA و FDOA با میانگین صفر و ماتریس کوواریانس  $\mathbf{Q}_r$  و  $\mathbf{Q}_{\dot{r}}$  هستند. در حالت کلی فرض می‌شود که  $\mathbf{n}_r$  و  $\mathbf{n}_{\dot{r}}$  ناهمبسته هستند.

در این مطالعه، حسگرها و تابشگر در شرایط LER قرار می‌گیرند. اگر فاصله ماهواره‌ها (گیرنده‌ها) از نقطه‌ای مانند  $\mathbf{O}$  برابر یا تقریباً برابر باشند و اگر فاصله مشترک ماهواره‌ها تا  $\mathbf{O}$  بسیار بیشتر از فاصله تابشگر تا  $\mathbf{O}$  باشند؛ شرایط LER برآورده می‌شود. فاصله تقریباً یکسان ماهواره‌ها تا نقطه مرجع با  $R$  به‌عنوان بُرد حسگر<sup>۱</sup> و فاصله تابشگر تا نقطه مرجع با  $r$  به‌عنوان بُرد منبع<sup>۲</sup> بیان می‌شوند. همچنین  $R/r$  بیانگر نسبت بُرد<sup>۱</sup> است. در

برای محدود کردن دامنه مطالعه، این مقاله یک تابشگر ساکن و حسگرهای متحرک را با اندازه‌گیری در یک بازه مشاهده کوتاه در نظر می‌گیرد. در مورد نمادها، حروف بزرگ و پررنگ نشان‌دهنده ماتریس‌ها و حروف کوچک پررنگ نشان‌دهنده بردار ستونی هستند. مقدار واقعی یا نسخه بدون نویز کمیت  $(\bullet)$  با  $(\bullet)^o$  و اختلاف آن‌ها با  $(\bullet) - (\bullet)^o = \Delta(\bullet)$  نشان داده می‌شود.  $\|\mathbf{A}\|$  برابر با نُرم دوم ماتریس  $\mathbf{A}$  به‌صورت  $\|\mathbf{A}\| = \sqrt{\mathbf{A}^H \mathbf{A}}$  است.  $\mathbf{A}^{-1}$  و  $\mathbf{A}^T$  به ترتیب معرف ترانپوز و معکوس ماتریس  $\mathbf{A}$  است و  $\mathbf{A}^{-T}$  معکوس ترانپوز ماتریس  $\mathbf{A}$  است.  $\mathbf{A}(i,:)$  بردار سطر  $i$ ام ماتریس  $\mathbf{A}$  است.  $\text{Cov}(\bullet)$  بیانگر ماتریس کوواریانس خطا است، عملگر  $\text{diag}(\mathbf{v})$  بردار  $\mathbf{v}$  را روی قطر اصلی قرار می‌دهد، عملگر  $\text{tr}(\mathbf{A})$  عنصر روی قطر اصلی ماتریس  $\mathbf{A}$  را جمع می‌زند و  $\mathbf{1}$  و  $\mathbf{0}$  بردارهای یک و صفر با اندازه مناسب هستند.

## ۲. سناریوی مکان‌یابی

یک سناریوی مکان‌یابی سه‌بعدی مطابق شکل (۱) در نظر گرفته می‌شود.  $M$  حسگر متحرک با مختصات مکان  $\mathbf{s}_i = [x_i, y_i, z_i]^T$  و سرعت  $\dot{\mathbf{s}}_i = [\dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i]^T$  نسبت به نقطه مرجع  $\mathbf{O}$ ، برای  $i = 1, 2, \dots, M$  فرض می‌شود. در این سناریو به مکان‌یابی تابشگر ساکن با مکان ناشناخته  $\mathbf{u} = [x, y, z]^T$  با استفاده از اندازه‌گیری‌های ترکیبی TDOA-FDOA پرداخته می‌شود.



شکل (۱). سناریوی مکان‌یابی LER سه بعدی [۱۳، ۱۴].

نقطه مرجع  $\mathbf{O}$  برای برخی کاربردها شناخته شده است، به‌عنوان مثال برای مکان‌یابی ماهواره‌ای مرکز زمین برای آن در نظر گرفته می‌شود؛ اما زمانی که گیرنده‌ها به طور تصادفی در یک شبکه حسگر قرار گرفته باشند، نقطه مرجع برای برقراری سناریوی LER در شکل (۱)، با برازش مکان گیرنده‌ها به یک دایره (در مکان‌یابی دو بعدی) و یا یک کره (در مکان‌یابی سه بعدی) تعیین می‌شود.

با در نظر گرفتن مبدأ مختصات برای نقطه مرجع  $\mathbf{O}$ ، فاصله

<sup>1</sup> Sensor range

<sup>2</sup> Source range

که در آن  $\dot{\mathbf{p}}_i^T$  به صورت رابطه (۱۳) است.

$$\dot{\mathbf{p}}_i^T = \frac{\dot{\mathbf{s}}_i^T}{R_i} - \mathbf{p}_i^T \frac{\dot{\mathbf{s}}_i}{R_i} \mathbf{p}_i^T \quad (13)$$

باتوجه به موارد بیان شده، معادلات اندازه‌گیری‌های TDOA و FDOA در شرایط سناریوی LER قوی به ترتیب با روابط (۱۴) و (۱۵) به دست می‌آیند.

$$r_{i1} = R_i - R_1 - (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_1)^T \mathbf{u} \quad (14)$$

$$\dot{r}_{i1} = \dot{R}_i - \dot{R}_1 - (\dot{\mathbf{p}}_i - \dot{\mathbf{p}}_1)^T \mathbf{u} \quad (15)$$

همان‌طور که در روابط (۱۴) و (۱۵) مشخص است، معادلات مکان‌یابی در روش پیشنهادی، با استفاده از یک رویکرد هندسی به مسئله در سناریوی LER، خطی‌سازی شده‌اند. در این روش، دیگر لازم نیست مانند روش‌های مکان‌یابی مرسوم [۴،۷] با در نظر گرفتن یک متغیر کمکی و مجذور کردن اندازه‌گیری‌ها، به خطی‌سازی معادلات مکان‌یابی پرداخت. به همین دلیل، روش پیشنهادی نیازی به تخمین دومرحله‌ای، یعنی یکبار تخمین متغیر کمکی و در نهایت تخمین مکان هدف، ندارد و با یکبار تخمین، مکان هدف را به صورت رابطه (۱۹) ارائه می‌دهد.

با در نظر گرفتن خطاهای اندازه‌گیری روابط (۶) و (۷)، هر اندازه‌گیری TDOA به صورت  $r_{i1} = r_{i1}^o + n_{r,i1}$  و هر اندازه‌گیری FDOA به صورت  $\dot{r}_{i1} = \dot{r}_{i1}^o + n_{\dot{r},i1}$  مدل می‌شوند. با قرار دادن این روابط در معادلات (۱۴) و (۱۵) تابع هزینه اندازه‌گیری‌های TDOA و FDOA به صورت روابط (۱۶) و (۱۷) به دست می‌آیند.

$$\varepsilon_{i1} \approx r_{i1} - (R_i - R_1) + (\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_1)^T \mathbf{u} \quad (16)$$

$$\dot{\varepsilon}_{i1} \approx \dot{r}_{i1} - (\dot{R}_i - \dot{R}_1) + (\dot{\mathbf{p}}_i - \dot{\mathbf{p}}_1)^T \mathbf{u} \quad (17)$$

که در آن‌ها  $\varepsilon_{i1}$  و  $\dot{\varepsilon}_{i1}$  به ترتیب بیانگر خطای اندازه‌گیری‌های TDOA و FDOA است. بنابراین، فرم ماتریسی عبارت (۱۶) و (۱۷) به منظور مدل‌سازی سناریوی LER قوی برای مکان‌یابی تابشگر با استفاده از اندازه‌گیری‌های ترکیبی TDOA-FDOA به صورت رابطه (۱۸) بیان می‌شوند.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{h} - \mathbf{G}\mathbf{u}, \\ \mathbf{h} &= \begin{bmatrix} r_{i1} - (R_i - R_1) \\ \dot{r}_{i1} - (\dot{R}_i - \dot{R}_1) \end{bmatrix}, \\ \mathbf{G} &= - \begin{bmatrix} \mathbf{p}_i^T - \mathbf{p}_1^T \\ \dot{\mathbf{p}}_i^T - \dot{\mathbf{p}}_1^T \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (18)$$

باتوجه به فرم خطی معادلات در سناریوی LER قوی، می‌توان تخمین WLS را برای کمینه کردن خطای معادلات مکان تابشگر به صورت رابطه (۱۹) به کاربرد.

$$\hat{\mathbf{u}} = (\mathbf{G}^T \mathbf{W} \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{W} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (19)$$

که در آن  $\mathbf{W}$  ماتریس وزن‌دهی است و به صورت رابطه (۲۰) به دست می‌آید.

این صورت، زمانی سناریوی LER برآورده می‌شود که نسبت بُرد بزرگ باشد. شرایط LER برای یک سناریوی مکان‌یابی ماهواره‌ای عمومی به صورت رابطه (۸) تعریف می‌شوند [۱۳].

$$R_i \approx R, \quad \frac{r}{R} \approx 0 \quad (8)$$

### ۳. جواب فرم بسته و تحلیل بایاس

در این بخش، یک جواب با فرم بسته برای حل مسئله مکان‌یابی تابشگر در سناریوی LER مبتنی بر اندازه‌گیری‌های ترکیبی TDOA-FDOA ارائه می‌شود. این الگوریتم نیازی به حدس اولیه، متغیر کمکی، تخمین دومرحله‌ای و استراتژی انتخاب ریشه پیچیده ندارد؛ همچنین به صورت تحلیلی نشان داده می‌شود که این تخمین‌گر می‌تواند تحت شرایط LER قوی به دقت CRLB در نویز گوسی وسیع دست یابد. مهم‌تر از آن، این روش از نظر مفهومی و محاسباتی ساده‌تر از روش‌های مبتنی بر تخمین دومرحله‌ای و ریشه‌یابی است. تحلیل بایاس ناشی از مدل‌سازی LER در این روش، تجزیه و تحلیل شده و یک راه‌حل کاهش بایاس برای آن ارائه می‌شود.

#### ۳-۱. جواب فرم بسته

با در نظر گرفتن بردار یکه مکان ماهواره‌ها به صورت  $\mathbf{p}_i = \mathbf{s}_i / R_i$ ، ارتباط بین متغیرهای  $R_i$ ،  $r_i$  و  $\mathbf{u}$  در سناریوی LER، به صورت رابطه (۹) است.

$$R_i = r_i \cos \beta_i + \mathbf{p}_i^T \mathbf{u} \quad (9)$$

باتوجه به شکل (۱)، قانون سینوس‌ها را در مثلثی که توسط نقطه مرجع  $\mathbf{O}$ ، مکان تابشگر  $\mathbf{u}$  و مکان حسگر  $\mathbf{s}_i$  تشکیل شده است، می‌توان مطابق رابطه (۱۰) بیان کرد.

$$|\sin \beta_i| = \frac{r}{R_i} |\sin \varepsilon_i| \leq \frac{r}{R} \quad (10)$$

با مقایسه روابط (۸) و (۱۰)، ملاحظه می‌شود که در سناریوی LER قوی،  $|\sin \beta_i| \approx 0$  است، بنابراین  $\beta_i \approx 0$  و  $\cos \beta_i \approx 1$  است. باتوجه به شکل (۱)، حالت برابری این عبارات در شرایط LER قوی، زمانی اتفاق می‌افتد که مکان تابشگر روی نقطه مرجع  $\mathbf{O}$  قرار گیرد. بنابراین، معادلات تقریبی فاصله تابشگر تا حسگر  $\hat{r}_i$  در شرایط LER قوی را می‌توان به صورت رابطه (۱۱) بیان کرد.

$$r_i \approx R_i - \mathbf{p}_i^T \mathbf{u} \quad (11)$$

نرخ تغییرات فاصله تابشگر تا حسگر  $\hat{r}_i$  نیز در شرایط LER قوی با رابطه (۱۲) محاسبه می‌شوند.

$$\dot{r}_i \approx \dot{R}_i - \dot{\mathbf{p}}_i^T \mathbf{u} \quad (12)$$

#### ۴-۱. کران پایین کرامر-رائو

کران پایین کرامر - رائو برای مکان صحیح یک تابشگر، به صورت رابطه (۲۴) است.

$$\text{CRLB}(\mathbf{u}) = \mathbf{J}^{-1} \quad (24)$$

که در آن،  $\mathbf{J}$  ماتریس اطلاعات فیشر<sup>۱</sup> (FIM) است که با در نظر گرفتن خطاهای اندازه‌گیری در مسئله، به صورت رابطه (۲۵) بیان می‌شود.

$$\mathbf{J} = \mathbf{U}^T \mathbf{Q}_r^{-1} \mathbf{U},$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{u}} & \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \mathbf{u}} \end{bmatrix}, \quad (25)$$

$$\mathbf{Q}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_f \end{bmatrix}$$

با تعریف  $\bar{\mathbf{p}}_i = (\mathbf{s}_i - \mathbf{u})\dot{r}_i / r_i^2 - \dot{\mathbf{s}}_i / r_i$  و  $\bar{\mathbf{p}}_i = (\mathbf{s}_i - \mathbf{u}) / r_i$  می‌توان  $(i-1)$  آمین سطر از عناصر ماتریس مشتق اندازه‌گیری‌ها را نسبت به مکان تابشگر برای  $i = 2, 3, \dots, M$  به صورت رابطه (۲۶) بیان کرد [۱۵].

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{u}^T} (i-1, :) = - \begin{bmatrix} \frac{\partial r_{i1}}{\partial \mathbf{u}^T} = (\bar{\mathbf{p}}_i - \bar{\mathbf{p}}_1)^T \\ \frac{\partial \dot{r}_{i1}}{\partial \mathbf{u}^T} = (\dot{\bar{\mathbf{p}}}_i - \dot{\bar{\mathbf{p}}}_1)^T \end{bmatrix}^T \quad (26)$$

تحت شرایط سناریوی LER قوی، بایاس ناشی از مدل‌سازی ناچیز است و تخمین‌گر پیشنهادی نآریب خواهد بود؛ بنابراین، ماتریس خطای تخمین WLS در رابطه (۱۹) را می‌توان با استفاده از رابطه (۲۷) محاسبه کرد [۱۶].

$$\text{Cov}(\hat{\mathbf{u}}) = (\mathbf{G}^T \mathbf{W} \mathbf{G})^{-1} \quad (27)$$

با جایگذاری ماتریس وزن‌دهی (۲۰) در (۲۷) و مقایسه آن با روابط CRLB بیان‌شده در (۲۴)، (۲۵) و (۲۶) مشاهده می‌شود در صورتی که  $\mathbf{G} \approx \mathbf{U}$  باشد، ماتریس کوواریانس خطای تخمین به CRLB می‌رسد. با در نظر گرفتن رابطه (۹) و محاسبه عبارت اول از تقریب بسط تیلور  $\bar{\mathbf{p}}_i$  و  $\dot{\bar{\mathbf{p}}}_i$  حول تابشگر نزدیک به نقطه مرجع در شرایط LER قوی، واضح است که  $\mathbf{G} \approx \mathbf{U}$  برقرار است. در این حالت راه‌حل پیشنهادی تقریباً کارآمد است و رابطه (۲۸) را می‌توان برای آن بیان کرد.

$$\text{Cov}(\hat{\mathbf{u}}) \approx \text{CRLB}(\mathbf{u}) \quad (28)$$

#### ۴-۲. پیچیدگی محاسباتی

با فرض در دسترس بودن  $M$  حسگر، تعداد  $L = M - 1$  اندازه‌گیری مجزا برای هر کدام از اندازه‌گیری‌های TDOA و FDOA وجود خواهد داشت. در این بخش، تعداد محاسبات لازم برای پردازش عبارت‌های مختلف الگوریتم پیشنهادی در جدول

$$\mathbf{W} = E(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}^T)^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_f \end{bmatrix} \quad (20)$$

#### ۳-۲. تحلیل بایاس

در روش پیشنهادی، با صرف‌نظر از بایاس ناشی از خطاهای اندازه‌گیری و به علت استفاده از روابط تقریبی (۱۱) و (۱۲) برای مدل‌سازی سناریوی LER، مقداری بایاس، به پاسخ مسئله تحمیل می‌شود. این روابط با فرض  $\beta_i \approx 0$  و  $\cos \beta_i \approx 1$  در شرایط LER قوی تقریب زده شده‌اند؛ اما در شرایطی که LER قوی نیست، بایاس ناشی از آن‌ها قابل‌توجه است. برای بررسی بایاس ناشی از مدل‌سازی LER به‌تنهایی، فرض می‌شود نویزهای دیگر وجود ندارند؛ سپس با کم کردن دو طرف رابطه (۱۹) از مکان صحیح تابشگر  $\mathbf{u}^o$ ، مقدار بایاس  $\Delta \mathbf{u}$  به صورت رابطه (۲۱) محاسبه می‌شود.

$$\Delta \mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}^o = (\mathbf{G}^T \mathbf{W} \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{W} \mathbf{b} \quad (21)$$

که در آن مقدار  $\mathbf{b}$  به صورت رابطه (۲۲) است.

$$\mathbf{b} = \mathbf{h} - \mathbf{G}\mathbf{u}^o = \begin{bmatrix} b_{21}, \dots, b_{i1}, \dots, b_{M1} \\ \dot{b}_{21}, \dots, \dot{b}_{i1}, \dots, \dot{b}_{M1} \end{bmatrix}^T \quad (22)$$

با در نظر گرفتن روابط (۴)، (۵)، (۹)، (۱۸) و مشتق رابطه (۹) به صورت  $\dot{r}_i = \dot{r}_i \cos \beta_i + \dot{\mathbf{p}}_i^T \mathbf{u}$ ، مقادیر  $b_{i1}$  و  $\dot{b}_{i1}$  به صورت رابطه (۲۳) محاسبه می‌شوند.

$$\begin{bmatrix} b_{i1} \\ \dot{b}_{i1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_i(1 - \cos \beta_i) - r_i(1 - \cos \beta_1) \\ \dot{r}_i(1 - \cos \beta_i) - \dot{r}_i(1 - \cos \beta_1) \end{bmatrix} \quad (23)$$

باتوجه به رابطه (۲۳)، در شرایطی که  $\cos \beta_i \approx 1$  است، مقدار بایاس نزدیک صفر خواهد بود. در این حالت  $\beta_i \approx 0$  است و سناریوی LER قوی است و مکان تابشگر و نقطه مرجع در نزدیکی یکدیگر قرار می‌گیرند. بنابراین راه‌حل دیگر برای کاهش بایاس در روش پیشنهادی، بهبود شرایط LER ضعیف و یا خیلی ضعیف به شرایط LER قوی با نزدیک کردن نقطه مرجع به تخمین مکان تابشگر در تکرارهای بعدی است تا بتوان یک تخمین نآریب از مکان تابشگر به دست آورد. بنابراین، در حالت کلی کاهش بایاس ناشی از مدل‌سازی LER با دو مرحله انجام می‌شود. در مرحله اول، مقدار بایاس محاسبه‌شده در رابطه (۲۱)، از تخمین اولیه رابطه (۱۹) کم می‌شود و در مرحله دوم، با قرار دادن تخمین اولیه از مرحله اول به جای نقطه مرجع، تخمین جدیدی از مکان تابشگر با تکرار الگوریتم مکان‌یابی زده می‌شود. در نهایت برای تخمین نهایی از مکان تابشگر، نتیجه تخمین جدید در مرحله دوم به تخمین مرحله اول افزوده می‌شود.

#### ۴. آنالیز کارایی

<sup>1</sup> Fisher Information Matrix

(۱) بیان می‌گردد.

جدول ۱. تعداد محاسبات لازم برای پردازش عبارتهای مختلف [۱۳].

عبارت	تعداد محاسبات
$\hat{R}_i$ و $R_i$	$NM$ ضرب و $M$ جذر
$\rho_i$	$N$ ضرب و $M$ تقسیم
$\hat{\rho}_i$	$NM$ ضرب و $M$ تقسیم
$\mathbf{W}$	یک معکوس ماتریس $2(L \times L)$
$\mathbf{G}$	$2(NM + L)$
$\mathbf{G}^T \mathbf{W}$	ضرب $NL^2$
$(\mathbf{G}^T \mathbf{W} \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{W}$	$2N^2L$ ضرب و یک معکوس ماتریس $N \times N$
$\mathbf{u}$	ضرب $NL$
$\cos \beta_i$	$M$ عملیات مثلثاتی
$\mathbf{b}$	$2(L + M + NM)$ ضرب و $M$ جذر
$\Delta \mathbf{u}$	ضرب $NL$

در انتهای بخش شبیه‌سازی و در جدول (۳)، نتایج حاصل از یک میانگین‌گیری مونت‌کارلو با تکرار الگوریتم‌های مختلف برای تعیین میزان صرفه‌جویی محاسباتی الگوریتم پیشنهادی در مقایسه با سایر روش‌های مرسوم آورده شده است.

## ۵. شبیه‌سازی

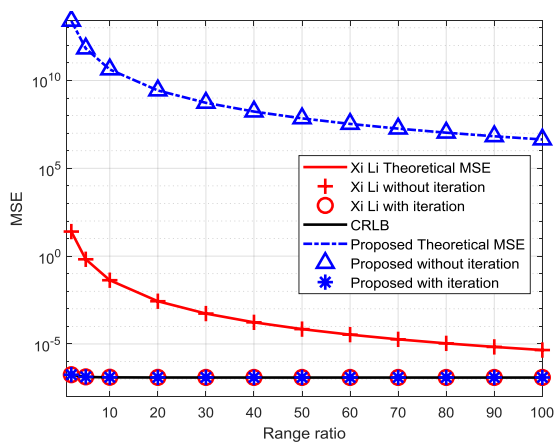
با در نظر گرفتن مبدأ مختصات به‌عنوان نقطه مرجع  $\mathbf{O}$  و اطلاعات تابشگر و حسگرها مطابق جدول (۲)، مقدار بُرد حسگر مشخص می‌شود.

جدول (۲). اطلاعات تابشگر و حسگرها در سناریوی LER [۷، ۱۴].

حسگرها					تابشگر	اطلاعات
۱۱	-۶۳	۱۶۹	۷۹	۱۱۶	۱۱۴	زاویه سمت
۴۶	-۲۲	۴۷	-۳۹	۷۶	-۱۵	زاویه ارتفاع
$\begin{bmatrix} 20 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 10 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 30 \\ 10 \\ 20 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 30 \\ 20 \\ 20 \end{bmatrix}$	۰	سرعت

در ابتدا و در شکل (۲)، با تغییر بُرد منبع، کارایی روش پیشنهادی با الگوریتم شی لی [۱۴]، برحسب نسبت بُرد متغیر و با ۲۰۰۰ اجرا مونت‌کارلو مقایسه می‌شود. این شبیه‌سازی برای تحلیل اثر بایاس ناشی از مدل‌سازی اندازه‌گیری‌های ترکیبی TDOA-FDOA در سناریوی LER انجام شده است. بنابراین، نویز اندازه‌گیری در آن تقریباً صفر و برابر  $\sigma_r = 10^{-7}$  فرض می‌شود. باتوجه به شکل (۲)، عملکرد مکان‌یابی روش پیشنهادی

را می‌توان در دو حالت مجزا با روش شی لی مقایسه کرد. حالت اول، بدون به‌روزرسانی نقطه مرجع و حالت دوم با به‌روزرسانی نقطه مرجع است. در حالت اول، با افزایش نسبت بُرد مقدار حداقل مربعات خطا ( $MSE^1$ ) جواب‌ها کاهش می‌یابد؛ همچنین در این حالت، نتایج مکان‌یابی با کاهش بایاس و نتایج تئوری بر هم منطبق شده‌اند. واضح است که راه‌حل مکان‌یابی روش پیشنهادی نسبت به روش شی لی به نسبت بُرد بزرگ‌تری برای رسیدن به CRLB نیاز دارد. علت بایاس تخمین بالاتر در روش پیشنهادی، بزرگ‌تر بودن خطای مدل‌سازی TDOA-FDOA ناشی از تقریب‌های (۱۱) و (۱۲) نسبت به خطای مدل‌سازی TDOA ناشی از تقریب (۱۱) به‌تنهایی است. در حالت دوم، مشاهده می‌شود که با به‌روزرسانی نقطه مرجع به پاسخ اولیه و تکرار الگوریتم، پاسخ هر دو روش روی CRLB منطبق می‌شوند. شکل (۲) نشان می‌دهد که راه‌حل کاهش بایاس با به‌روزرسانی نقطه مرجع می‌تواند به طور قابل‌توجهی عملکرد مکان‌یابی را حتی در شرایط LER بسیار ضعیف بهبود بخشد. این نتیجه با مطالب بیان‌شده در بخش ۴-۱ مطابقت دارد و بیانگر آن است که راه‌حل پیشنهادی در شرایط LER، کارآمد است و به CRLB می‌رسد.

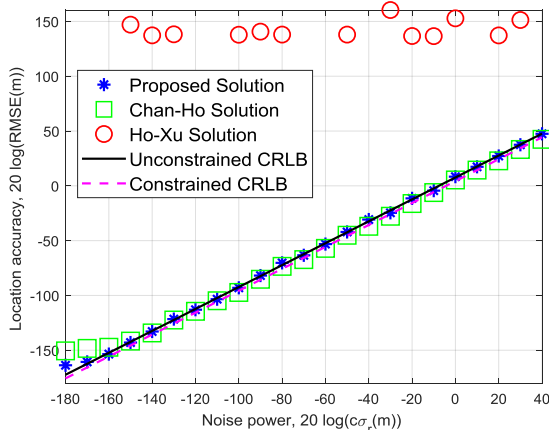


شکل (۲). مقایسه خطای حداقل مربعات روش پیشنهادی با روش شی لی در شرایط مختلف LER.

در شکل (۳)، با در نظر گرفتن مبدأ مختصات برای نقطه مرجع  $\mathbf{O}$ ، اطلاعات تابشگر و حسگرها مطابق جدول (۲)، ارتفاع ۲۰۰۰ km برای حسگرها از سطح زمین و ۲۰۰۰ اجرا مونت‌کارلو، به شبیه‌سازی کارایی مکان‌یابی روش پیشنهادی در مقایسه با روش‌های هو-شیو [۷]، چان-هو [۴] و CRLB در نویزهای اندازه‌گیری مختلف پرداخته شده است. اندازه‌گیری‌های نویزی با افزودن یک نویز گوسی با میانگین صفر و واریانس متغیر  $\sigma_r^2$  به اندازه‌گیری‌های واقعی حاصل می‌شوند. ماتریس کوواریانس خطای اندازه‌گیری TDOA به‌صورت رابطه (۲۹) در نظر گرفته

<sup>1</sup> Mean Square Error

و تنها با کاهش تعداد حسگرها به عدد ۴، نتایج شبیه‌سازی برای بررسی تأثیر کاهش تعداد حسگر در کارایی مکان‌یابی روش پیشنهادی در مقایسه با روش‌های چان-هو، هو-شیو و CRLB در نویزهای اندازه‌گیری مختلف در شکل‌های (۴) و (۵) آورده شده است.



شکل (۴). مقایسه RMSE روش پیشنهادی با روش‌های چان-هو و هو-شیو در نویزهای مختلف اندازه‌گیری با کاهش تعداد حسگرها.

مقایسه RMSE روش‌های مختلف با استفاده از ۴ حسگر در شکل (۴)، نشان می‌دهد که روش پیشنهادی و روش چان-هو مانند شکل (۳) شرایط قبلی خود را دارند؛ اما روش هو-شیو به دلیل بدحالت شدن ماتریس‌ها نمی‌تواند در هیچ مقداری از نویز اندازه‌گیری به CRLB برسد و جواب‌های غیردقیق دارد و حتی در مقادیر بسیاری اصلاً پاسخی ارائه نمی‌دهد. این شکل بیانگر آن است که روش پیشنهادی توانسته است نسبت به روش هو-شیو با تعداد حسگر کمتر، در بازه نویز وسیع‌تری به CRLB برسد.

باتوجه به شکل (۵)، واضح است که با کاهش تعداد حسگر پاسخ تمامی الگوریتم‌های مختلف و CRLB در مقادیر نویزی مختلف از مقدار قبلی خودشان به موازات فاصله می‌گیرند. برای مثال همان‌طور که نشان داده شده است با کاهش یک حسگر، RMSE پاسخ الگوریتم‌ها در نویزهای مختلف به مقدار تقریباً ۳dB افزایش می‌یابند. نکته جالب منطبق شدن CRLB مربوط به مکان‌یابی با استفاده از ۵ حسگر و CRLB مربوط به اضافه شدن محدودیت به مسئله در حالت استفاده از ۴ حسگر است. این نکته، مطالب بیان‌شده در توضیحات شکل (۳) را تأیید می‌کند و بیانگر آن است که افزودن قیود محدودیت به مسئله که وجود آن در بسیاری از سناریوهای عملی دشوار است و باعث افزایش پیچیدگی به مسئله و بیش‌ازحد تعیین شدن آن می‌شود، در نهایت به اندازه یک حسگر اضافه، دقت روش مکان‌یابی را می‌تواند بهبود ببخشد.

می‌شود [۱۳].

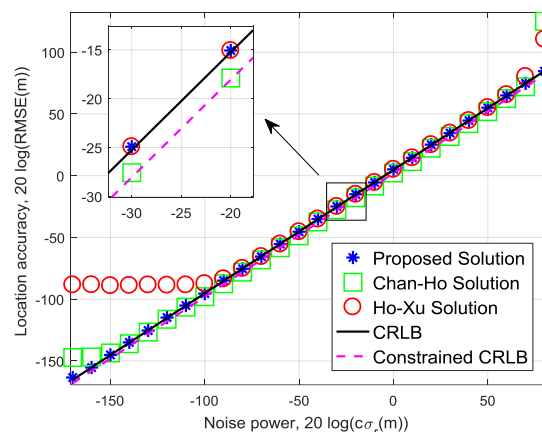
$$\mathbf{Q}_i = \sigma_r^2 K (\text{tr}(\mathbf{\Gamma}) \mathbf{\Gamma}_L - \mathbf{\Gamma}_L \mathbf{1} \mathbf{1}^T \mathbf{\Gamma}_L)^{-1}$$

$$\mathbf{\Gamma} = \text{diag} \left\{ \|\mathbf{u} - \mathbf{s}_i\|^2 \right\}^{-1}, \quad i = 1, \dots, M \quad (29)$$

$$\mathbf{\Gamma}_L = \text{diag} \left\{ \|\mathbf{u} - \mathbf{s}_i\|^2 \right\}^{-1}, \quad i = 2, \dots, M$$

که در آن،  $K$  عددی است که معادله  $\text{tr}(\mathbf{Q}_i) = (M-1)\sigma_r^2$  برقرار می‌کند. ماتریس کوواریانس خطای اندازه‌گیری FDOA به صورت  $\mathbf{Q}_f = 0.01\mathbf{Q}_i$  فرض می‌شود [۶،۸] و در نهایت ماتریس کوواریانس خطای اندازه‌گیری‌های ترکیبی TDQA-FDOA نیز به صورت رابطه (۳۰) در نظر گرفته می‌شود [۴].

$$\mathbf{Q}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_i & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_f \end{bmatrix} \quad (30)$$



شکل (۳). مقایسه RMSE روش پیشنهادی با روش‌های چان-هو و هو-شیو در نویزهای اندازه‌گیری مختلف.

مطابق شکل (۳)، با افزایش نویز اندازه‌گیری، ریشه میانگین مربعات خطا ( $\text{RMSE}^1$ ) هر سه روش در مقایسه با CRLB به صورت تقریباً خطی افزایش می‌یابند. تقریباً در نویزهای بین -۹۰dB تا ۶۰dB همه روش‌ها جواب یکسانی ارائه می‌دهند؛ اما در حالت کلی واضح است که روش پیشنهادی نسبت به سایر روش‌ها توانسته است در بازه نویز وسیع‌تری با CRLB منطبق باشد. در مجموع، روش چان-هو با افزودن سه محدودیت به مسئله، از جمله قید محدودیت ارتفاع تابشگر، در مقایسه با روش ارائه‌شده در این مقاله و روش هو-شیو دقت بالاتری دارد و توانسته به CRLB مربوط به حالت مکان‌یابی با در نظر گرفتن محدودیت در مسئله برسد؛ اما این بهبود دقت چندان قابل توجه نیست و کمتر ۳dB است. علاوه بر آن، افزودن محدودیت به مسئله باعث بیش‌ازحد تعیین شدن مسئله می‌شود؛ در حالی که واضح است اطلاعات محدودیت‌ها در بسیاری از سناریوهای عملی موجود نیست.

با در نظر گرفتن تمام شرایط و اطلاعات شبیه‌سازی شکل (۳)

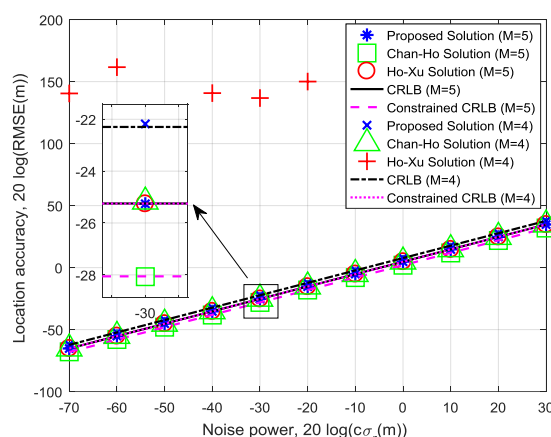
<sup>1</sup> Root Mean Square Error



ندارد و هیچ محدودیتی نیز به مسئله اعمال نمی‌کند. این روش با یک رویکرد هندسی در سناریوی LER توسعه یافته است؛ برای همین بدون نیاز به تخمین دومرحله‌ای و استراتژی انتخاب ریشه، مکان هدف را تخمین می‌زند. به صورت تحلیلی نشان داده شد که این روش می‌تواند به دقت CRLB تحت نویز گوسی و شرایط LER دست یابد. مهم‌تر از آن، این روش از نظر مفهومی و محاسباتی ساده‌تر از روش‌های تخمین دومرحله‌ای و سایر روش‌های مبتنی بر افزودن محدودیت به مسئله و فرایند پیچیده ریشه‌یابی است. نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد الگوریتم پیشنهادی نسبت به سایر روش‌های مرسوم می‌تواند با زمان اجرا و پیچیدگی کمتر، در بازه نویز اندازه‌گیری وسیع‌تری به CRLB برسد.

## ۶. مراجع

- [1] Y. U. Huang, G. Huang, G. Jun, and W. U. Xinhui, "Approximate maximum likelihood algorithm for moving source localization using TDOA and FDOA measurements," *Chinese J. Aeronaut.*, vol. 25, no. 4, pp. 593–597, 2012, doi: 10.1016/S1000-9361(11)60423-8.
- [2] J. Smith and J. Abel, "Closed-form least-squares source location estimation from range-difference measurements," *IEEE Trans. Acoust.*, vol. 35, no. 12, pp. 1661–1669, 1987, doi: 10.1109/TASSP.1987.1165089.
- [3] W. Hao, S. Wei-min, and G. Hong, "A novel Taylor series method for source and receiver localization using TDOA and FDOA measurements with uncertain receiver positions," in *Proceedings of 2011 IEEE CIE International Conference on Radar*, IEEE, pp. 1037–1040, 2011, doi: 10.1109/CIE-Radar.2011.6159729.
- [4] K. C. Ho and Y. T. Chan, "Geolocation of a known altitude object from TDOA and FDOA measurements," *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, vol. 33, no. 3, pp. 770–783, 1997, doi: 10.1109/7.599239.
- [5] L. Lin, H.-C. So, F. K. W. Chan, Y. T. Chan, and K. C. Ho, "A new constrained weighted least squares algorithm for TDOA-based localization," *Signal Processing*, vol. 93, no. 11, pp. 2872–2878, 2013, doi: 10.1016/j.sigpro.2013.04.004.
- [6] X. Qu, L. Xie, and W. Tan, "Iterative constrained weighted least squares source localization using TDOA and FDOA measurements," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 65, no. 15, pp. 3990–4003, 2017, doi: 10.1109/TSP.2017.2703667.
- [7] K. C. Ho and W. Xu, "An accurate algebraic solution for moving source location using TDOA and FDOA measurements," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 52, no. 9, pp. 2453–2463, 2004, doi: 10.1109/TSP.2004.831921.
- [8] A. Noroozi, A. H. Oveis, S. M. Hosseini, and M. A. Sebt, "Improved algebraic solution for source localization from TDOA and FDOA measurements," *IEEE Wirel. Commun. Lett.*, vol. 7, no. 3, pp. 352–355, 2017, doi: 10.1109/LWC.2017.2777995
- [9] K. C. Ho, X. Lu, and L. Kovavisaruch, "Source



شکل (۵). بررسی اثر کاهش تعداد حسگر در پاسخ الگوریتم‌های مختلف.

در انتها برای تعیین کمیت میزان صرفه‌جویی در محاسبات، کدهای نرم‌افزار MATLAB برای مقایسه زمان اجرای روش پیشنهادی با الگوریتم‌های چان - هو و هو - شیو در شرایط مشابه، روی یک سیستم با مشخصات CPU Intel i9-11900k با ۶۴GB رم و ۳/۵GHz کلاک حاصل از میانگین زمان اجرا الگوریتم‌ها در جدول (۳) آورده شده است.

جدول (۳). مقایسه زمان اجرای الگوریتم‌های مکان‌یابی بر حسب ثانیه برای ۵۰۰۰ اجرا.

درصد افزایش	زمان اجرا الگوریتم	نوع الگوریتم
۰	۲/۷۲۹۳	روش پیشنهادی
٪۸۲/۸	۱۵/۸۷۷۹	روش چان - هو
٪۲۰/۹	۳/۴۴۹۸	روش هو - شیو

باتوجه به اطلاعات به‌دست‌آمده از ۵۰۰۰ مرتبه اجرای الگوریتم‌ها که در جدول (۲) خلاصه شده است؛ مشخص می‌شود که روش پیشنهادی تقریباً نسبت به روش چان-هو ۸۳٪ و نسبت به روش هو-شیو ۲۱٪ به زمان اجرای کمتری نیاز دارد. بنابراین، می‌توان نتیجه گرفت که روش پیشنهادی تقریباً به همین میزان با کاهش بار محاسباتی همراه است.

## ۶. نتیجه‌گیری

در این مقاله راهکار جدیدی مبتنی بر اندازه‌گیری‌های ترکیبی TDOA-FDOA برای حل مسئله مکان‌یابی ماهواره‌ای ارائه شده است. راه‌حل‌های فرم بسته مکان‌یابی در ادبیات پیشینه تحقیق به یک حدس اولیه مناسب از مکان تابشگر نیاز دارند؛ یا از یک متغیر کمکی استفاده می‌کنند که منجر به یک تخمین دومرحله‌ای می‌شود و یا با افزودن قیدهای محدودیت به مسئله به یک استراتژی انتخاب ریشه پیچیده برای انتخاب ریشه مناسب نیاز دارند. روش پیشنهادی به حدس اولیه و متغیر کمکی نیاز

- no. 12, pp. 8273–8285, 2016, doi: 10.1109/TWC.2016.2613534.
- [14] X. Li, F. Guo, L. Yang, and K. C. Ho, “Complexity-Reduced Solution for TDOA Source Localization in Large Equal Radius Scenario with Sensor Position Errors,” in *2018 26th European Signal Processing Conference (EUSIPCO)*, IEEE, pp. 361–365, 2018, doi: 10.23919/EUSIPCO.2018.8553125.
- [15] J. Li *et al.*, “Joint TDOA, FDOA and PDOA localization approaches and performance analysis,” *Remote Sens.*, vol. 15, no. 4, p. 915, 2023, doi: 10.3390/rs15040915.
- [16] X. Zhang, F. Wang, H. Li, and B. Himed, “Covariance-free TDOA/FDOA-based moving target localization for multi-static radar,” in *2020 IEEE International Radar Conference (RADAR)*, IEEE, pp. 901–905, 2020, doi: 10.1109/RADAR42522.2020.9114799
- localization using TDOA and FDOA measurements in the presence of receiver location errors: Analysis and solution,” *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 55, no. 2, pp. 684–696, 2007, doi: 10.1109/TSP.2006.885744
- [10] E. Choi and D. A. Cicci, “Analysis of GPS static positioning problems,” *Appl. Math. Comput.*, vol. 140, no. 1, pp. 37–51, 2003, doi: 10.1016/S0096-3003(02)00193-5.
- [11] L. A. Romero, J. Mason, and D. M. Day, “The large equal radius conditions and time of arrival geolocation algorithms,” *SIAM J. Sci. Comput.*, vol. 31, no. 1, pp. 254–272, 2008, doi: 10.1137/070699020.
- [12] L. A. Romero and J. Mason, “Evaluation of direct and iterative methods for overdetermined systems of TOA geolocation equations,” *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, vol. 47, no. 2, pp. 1213–1229, 2011, doi: 10.1109/TAES.2011.5751253.
- [13] S. Li and K. C. Ho, “Accurate and Effective Localization of an Object in Large Equal Radius Scenario,” *IEEE Trans. Wirel. Commun.*, vol. 15,