Scientific Journal of Electronical & Cyber Defence
Vol. 10, No. 3, Autumn 2022, Serial No. 39

# Quasi-transversals in Latin Squares and k-domination in graphs

A. Kazemi *, Behnaz Pahlavsay

*Associate Professor, Faculty of Mathematics, Mohaghegh Ardabili University, Ardabil, Iran

(Received: 27/10/2021, Accepted: 21/12/2021)

**ABSTRACT**

*In this paper, we first present the relation between a transversal in a Latin square with some concepts in its Latin square graph, and give an equivalent condition for a Latin square has an orthogonal mate. The most famous open problem involving Combinatorics is to find maximum number of disjoint transversals in a Latin square. So finding some family of decomposible Latin squares into disjoint transversals is our next aim. In the next section, we give an equivalent statement of a conjecture which has been attributed to Brualdi, Stein and Ryser by the concept of quasi-transversal. Finally, we prove the truth of the Rodney's conjecture for a family of graphs.*

**Keywords**: Latin square, transversal, quasi-transversal, k-domination number, domatic number.

* Corresponding Author Email: Adelpkazemi@yahoo.com

نشریه علمی "پدافند الکترونیکی و سایبری"

سال دهم، شماره ۳، پاییز ۱۴۰۱، ص ۷۵- ۶۷

علمی – پژوهشی

# شبه–ترنسورسال‌ها در مربعات لاتین و k- احاطه‌گری در گراف‌ها

عادل کاظمی پیله‌درق[۱*]، بهناز پهلوسای[۲]

۱- دانشیار، دانشکده ریاضی، دانشگاه محقق اردبیلی، اردبیل، ایران ۲- دکتری، دانشکده ریاضی، دانشگاه هوکایدو، ساپورو، ژاپن

(دریافت: ۱٤۰۰/۰۸/۰۵، پذیرش: ۱٤۰۰/۰۹/۳۰)

## چکیده

در این مقاله، ابتدا رابطه بین یک ترنسورسال در یک مربع لاتین با برخی از مفاهیم موجود در گراف مربع لاتین ارائه شده، و سپس یک شرط معادل برای این‌که یک مربع لاتین دارای یک مزدوج متعامد باشد بیان شده است. یکی از مهم‌ترین مسائل باز در ترکیبیات، یافتن بیشترین تعداد از ترنسورسال‌های مجزا در یک مربع لاتین است؛ بنابراین یافتن برخی خانواده از مربعات لاتین قابل‌تجزیه به ترنسورسال‌های مجزا هدف بعدی ماست. در ادامه، با کمک مفهوم شبه-ترنسورسال یک بیان معادل از یک حدس منسوب به برآوردی، استین و ریس را بیان کرده و در پایان درستی حدس رودنی را برای یک خانواده از گراف‌ها اثبات کرده‌ایم.

**کلیدواژه‌ها: مربع لاتین، ترنسورسال، شبه-ترنسورسال، عدد k-احاطه‌گری، عدد دُماتیک**

## ۱- مقدمه

همه گراف‌های مدنظر در این مقاله، متناهی، ساده و غیرجهت‌دار هستند. برای اصطلاحات استاندارد بیان‌نشده نظریه گرافی می‌توانید به [۲۱] مراجعه کنید. فرض کنید $G=(V,E)$ یک گراف با مجموعه رئوس $V$ و مجموعه یال‌های $G$ باشد. همسایگی باز و بسته یکی راس $v$ از گراف $G$ را به ترتیب با $N_G(v)$ و نشان می‌دهیم. درحالی‌که درجه یک راس $v$ نیز با ، نشان داده می‌شود، کمترین درجه و بیشترین درجه گراف $G$ نیز به ترتیب با $\delta(G)$ و $\Delta(G)$ نمایش داده خواهد شد.

## ۱-۱- مربع لاتین

به‌ازای $r \leq n$، یک مستطیل لاتین از اندازه $n \times r$ یک آرایه متشکل از $n$ سطر و $r$ ستون است که درایه‌های آن از یک مجموعه $n$ عضوی، عموماً $[n]=\{1,2,\dots,n\}$، به نام مجموعه نماد آن، بوده به‌طوری‌که هیچ عضوی از آن مجموعه در هیچ سطر و هیچ ستونی بیش از یک بار ظاهر نمی‌شود. یک مستطیل لاتین $n \times n$ یک مربع لاتین از مرتبه $n$ نامیده می‌شود. بدیهی است که در یک مربع لاتین با تعویض برخی از سطرهای آن باهم یا برخی از ستون‌های آن باهم، یا برخی از اعضای $[n]$ با هم، حاصل باز هم یک مربع لاتین است. دو مربع لاتین هم‌مرتبه با درایه‌های استفاده شده از یک مجموعه مشترک $X$ بنام‌های $L$ و آیزوتوپیک[1] نامیده می‌شوند؛ اگر یک سه‌تایی مرتب موجود باشد که $L$ را به $L'$ تبدیل کند که در آن $f$ یک جایگشت روی مجموعه سطرهای $L$، $g$ یک جایگشت روی مجموعه ستون‌های $L$ و $h$ یک جایگشت روی اعضای مجموعه $X$ است. این بدین معنی است که اگر $k$ درایه موجود در موقعیت $(i,j)$ از باشد، آنگاه $h(k)$ درایه موجود در موقعیت $(f(i),g(i))$ از است. سه‌تایی $(f,g,h)$ فوق یک آیزوتوپی نامیده می‌شود. فرض کنید $L_1$ و $L_2$ دو مربع لاتین از مرتبه $n$ با مجموعه‌های نماد به ترتیب $A_1$ و $A_2$ باشند. اگر یک تناظر ۱-۱ بنام وجود داشته باشد، آنگاه می‌گوییم که $L_1$ و $L_2$ نماد-آیزومرف‌اند و می‌نویسیم $L_2=\sigma(L_1)$. فرض کنید یک مربع لاتین $L$ از مرتبه را بتوان به مستطیل‌های لاتین $L_1$، ...، $L_t$ از اندازه‌های ترتیب ، ...، افراز کرد به‌طوری‌که اولین $m_1$ سطر همان $m_1$ سطر $L_1$، $m_2$ سطر دوم $L$ همان $m_2$ سطر ، ...، سطر $t$-ام $L$ همان $m_t$ سطر $L_t$ باشند. در این صورت برای سادگی می‌نویسیم: .

یک زوج مربع لاتین $A=[a_{ij}]$ و $B=[b_{ij}]$ از مرتبه $n$ را یک زوج متعامد[2] می‌نامیم اگر همه $n^2$ زوج مرتب متفاوت باشند.

یک آرایه متعامد $OA(n,3)$ از مرتبه $n$ و عمق ۳ یک آرایه با درایه‌هایی از مجموعه $[n]$ است که به‌ازای هر دو سطر آن همه $n^2$ زوج مرتب عمودی موجود در آن دو سطر متفاوت‌اند. فرض کنید یک چنین آرایه‌ای موجود است. سه سطر آن را با یک ترتیبی $r$، $c$ و $s$ نام می‌نهیم. برای هر زوج مرتب یک $k$ موجود است؛ به‌طوری‌که $r_k=i$ و $c_k=j$. به‌ازای همه مقادیر $i$ و $j$ یک مربع با درایه $s_k$ جایگذاری شده در سطر

* رایانامه نویسنده مسئول: Adelpkazemi@yahoo.com

[1] Isotopic

[2] Orthogonal Mate



ناشر: دانشگاه جامع امام حسین (ع)

و ستون $j$ می‌سازیم. بنا بر تعریف آرایه متعامد، این مربع یک مربع لاتین است. چون عکس این عمل نیز امکان‌پذیر است، لذا مفاهیم آرایه متعاد و مربع لاتین معادل هم‌اند. شکل (۱) یک و مربع لاتین متناظرش را نشان می‌دهد.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3 | 2 | 4 | 1 |
| 1 | 4 | 2 | 3 |
| 4 | 3 | 1 | 2 |
| 2 | 1 | 3 | 4 |

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Rows | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| Columns | 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| Symbols | 3 | 2 | 4 | 1 | 1 | 4 | 2 | 3 | 4 | 3 | 1 | 2 | 2 | 1 | 3 | 4 |

**شکل (۱)**. یک مربع لاتین از مرتبه ۴ و OA(4,3) متناظرش

یک مربع لاتین مدور[1] یک مربع لاتین است که هر ستون آن با اضافه کردن یک عدد یکسان به درایه‌های ستون قبلی آن به دست آمده است. می‌دانیم که هر مجموعه متناهی $G$ از مرتبه با یک عمل دوتایی تعریف‌شده روی آن یک نیم‌گروه است. اگر و تنها اگر جدول عمل آن یک مربع لاتین از مرتبه $n$ باشد. این مربع لاتین با $L_G$ نمایش داده می‌شود.

روش‌های مختلفی جهت ساختن مجموعه‌ای بزرگ‌تر از مربعات لاتین متعامد از مجموعه‌ای کوچک‌تر از آن‌ها وجود دارند. به‌خصوص اویلر[2] در [۶]، مایلر[3] در [۱۳]، مان[4] در [۱۴] و پارکر[5] در [۱۵ و ۱۶] همگی چنین روش‌هایی را ارائه کرده‌اند. نتایج اویلر و مایلر به مربعات لاتین خاصی بنام نوع $q$-گام مربوط‌اند.

یک مربع لاتین از مرتبه $mq$ از نوع $q$-گام[6] نامیده می‌شود. اگر بتوان آن را با یک ماتریس $q \times q$ از بلوک‌های $A_{ij}$ به‌صورت:

$$\begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$$

نمایش داد، که در آن هر بلوک $A_{ij}$ خود یک مربع لاتین از مرتبه $q$ است، که یک زیرمربع لاتین نیز نامیده می‌شود، و دو بلوک $A_{ij}$ و $A_{kt}$ شامل نمادهای یکسان‌اند. اگر و تنها اگر

.

بدیهی است که هر مربع لاتین مدور یک مربع لاتین از نوع ۱- گام است.

یک ترنسورسال[7] در یک مربع لاتین از مرتبه $n$ یک مجموعه از درایه‌هایی است که شامل دقیقاً یک درایه از هر سطر و از هر ستون و از هر نماد است. بیشترین تعداد از ترنسورسال‌های مجزا در یک مربع لاتین $L$ عدد ترنسورسال آن نامیده می‌شود و با نمایش داده می‌شود. به‌طور مشابه، یک ترنسورسال در یک مستطیل لاتین $n \times r$ یک مجموعه از درایه‌هایی است که شامل دقیقاً یک درایه از هر سر و حداکثر یک درایه از هر ستون و حداکثر یک نماد است. به ازای هر ترنسورسال $T$ در یک مربع لاتین $L = (L_1, \dots, L_t)$ نمایش $T = (T_1, \dots, T_t)$ بیان می‌کند که به ترنسورهای $T_i$ در مستطیل‌های لاتین مجزای $L_i$ از اندازه افراز شده است.

اگر $\tau(L) = n$، آنگاه گفته می‌شود که مربع لاتین $L$ یک تجزیه به ترنسورسال‌های مجزا دارد. در [۲۰] وَنلِس[8] و همکارانش مفهوم ترنسورسال را به‌طور طبیعی به $k$-ترنسورسال به‌صورت زیر گسترش دادند:

به‌ازای هر عدد صحیح مثبت $k$، یک $k$-ترنسورسال در یک مربع لاتین از مرتبه $n$ یک مجموعه متشکل از $nk$ حجره است که در هر سطر $k$ مورد و در هر ستون $k$ مورد انتخاب شده و هر نماد هم دقیقاً $k$ بار در آن‌ها ظاهر شده است. بیشترین تعداد - ترنسورسال‌های مجزا در یک مربع لاتین $L$ عدد $k$-ترنسورسال آن نامیده شده و با $\tau_k(L)$ نمایش داده می‌شود. به‌وضوح - . اگر $\tau_k(L) = \frac{n}{k}$، آنگاه گفته می‌شود که $L$ یک تجزیه به $k$-ترنسورسال‌های مجزا دارد. نکته زیر به‌وضوح برقرار است.

**نکته:** مکمل یک $k$-ترنسورسال در یک مربع لاتین از مرتبه یک $(n-k)$-ترنسورسال در همان مربع لاتین است.

یک ترنسورسال جزئی[9] از طول $k$ از یک مربع لاتین نیز یک مجموعه متشکل از $k$ درایه است که هر درایه آن از سطرها و ستون‌های مختلف چنان انتخاب شده‌اند که هیچ دو درایه شامل یک نماد مشترک نیست. یک ترنسورسال جزئی که زیرمجموعه‌ای از یک ترنسورسال باشد، تکمیل‌پذیر[10] و در غیر این صورت غیرقابل‌گسترش[11] نامیده می‌شود. یک ترنسورسال جزئی از طول $n$ در واقع یک ترنسورسال است. چون هر مربع لاتین لزوماً دارای ترنسورسال نیست، بهترین انتظاری که می‌توان داشت یافتن ترنسورسال‌های جزئی از طول $n-1$ است. چنین ترنسورسال جزئی، نزدیک-ترنسورسال[12] نامیده شده‌اند.

[1] Cyclic Latin Square
[2] Euler
[3] Mailler
[4] Mann
[5] Parker
[6] -Step Type

[7] Transversal
[8] Wanless
[9] Partial Transversal
[10] Completable
[11] Non-Extendible
[12] Near- Transversal

## ۲-۱- گراف مربع لاتین، رنگ‌آمیزی و احاطه‌گری یک گراف

به‌ازای یک مربع لاتین $L = [l_{ij}]$، یک گراف مربع لاتین، با نمایش‌های $L_3(L,n)$ یا به‌طور خلاصه $L_3(n)$، گرافی است با مجموعه رئوس $\{(i,j)|1 \leq i,j \leq n\}$ که در آن دو راس $(i,j)$ و $(p,q)$ مجاورند اگر و فقط اگر $i = p$ یا $j = q$ یا $l_{ij} = l_{pq}$. این گراف یک گراف $3(n-1)$-منظم بوده و هر دو راس مختلف $(i,j)$ و $(i,q)$ دارای $n$ همسایه مشترک است که $n-2$ مورد آنها در سطر $i$ و دو مورد دیگر در ستون‌های $j$ و $q$ قرار دارند. به‌طور مشابه، هر دو راس متفاوت مختلف $(i,j)$ و $(i,q)$ دارای $n$ همسایه مشترک‌اند. همین‌طور قابل‌بررسی است که هر دو راس متفاوت $(i,j)$ و $(p,q)$ با شرط $l_{ij} = l_{pq}$ نیز دارای $n$ همسایه مشترک‌اند.

یک $k$-رنگ‌آمیزی سَره از یک گراف $G$ یک تابع از مجموعه رئوس گراف به یک مجموعه $k$ عضوی (بنام مجموعه رنگ‌ها) است به‌طوری‌که هر دو راس مجاور دارای دو رنگ متفاوت باشند. عدد رنگی $G$ با نمایش $\chi(G)$ کمترین تعداد رنگ لازم در یک رنگ‌آمیزی سره از $G$ است [۲۱]. در یک رنگ‌آمیزی سره از $G$، مجموعه مستقل متشکل از رئوس همرنگ را یک کلاس رنگ از آن نامیده می‌شود. اگر $f$ یک $k$-رنگ‌آمیزی سره از یک گراف $G$ با کلاس‌های رنگ $V_1$، $V_2$، ...، $V_k$ باشد، آن را به‌صورت $f = (V_1, \ldots, V_k)$ نمایش می‌دهیم.

احاطه‌گری در گراف‌ها یکی از مطالب پرمطالعه در نظریه گراف بوده و اکثر مقالات مرتبط با آن در دو کتاب [۱۰-۹] آمده است. به‌ازای هر عدد صحیح مثبت $k$، یک زیرمجموعه $S$ از $V$ یک مجموعه $k$-احاطه‌گر[1]، به‌طور خلاصه یک $kDS$، از $G$ نامیده می‌شود اگر به‌ازای هر $v \in V - S$، $|N_G(v) \cap S| \geq k$. عدد $k$-احاطه‌گری[2] $\gamma_k(G)$ از $G$ کمترین اندازه از یک مجموعه $k$-احاطه‌گر از $G$ است. برای وجود یک مجموعه $k$-احاطه‌گر لازم است $\delta(G) \geq k-1$. یک مجموعه $k$-احاطه‌گر از اندازه $\gamma_k(G)$ یک $\gamma_k(G)$-مجموعه نامیده می‌شود. یک افراز $k$-دُماتیک[3] از $G$ یک افراز از $V(G)$ به مجموعه‌های $k$-احاطه‌گر است. بیشترین تعداد از مجموعه‌های $k$-احاطه‌گر در یک افراز $k$-دُماتیک از $G$ عدد $k$-دماتیک[4] $d_k(G)$ از $G$ نامیده می‌شود. عدد ۱-احاطه‌گری و عدد ۱-دماتیک به ترتیب به‌عنوان عدد احاطه‌گری و عدد دماتیک $G$ شناخته شده و آن‌ها را به‌ترتیب با $\gamma(G)$ و $d(G)$ نمایش می‌دهند. عدد $k$-احاطه‌گری اولین بار توسط فینک[5] و جاکوبسون[6] در [۷ و ۸] موردمطالعه قرار گرفته و کوکئین[7] و هدتنیمی[8] در [۳] مفهوم عدد دماتیک یک گراف را ایجاد کردند. برای اطلاعات بیشتر روی این موضوع به مرجع [۱۰] می‌توان مراجعه کرد.

به‌ازای اعداد صحیح مثبت $k$ و $l$ یک مجموعه $k$-احاطه‌گری از یک گراف $G$ یک مجموعه احاطه‌گر $(k,l)$-مستقل، یا به‌طور خلاصه یک $(k,l)$ - $IDS$، از $G$ نامیده می‌شود اگر زیرگراف القایی توسط $s$ یک مجموعه $l$-مستقل باشد، یعنی $\Delta(G[s]) \leq l-1$. عدد احاطه‌گری $(k,l)$-مستقل (متناظراً عدد $l$-استقلال) از $G$ به ترتیب با نمایش‌های $i_{l,k}$ (متناظراً $\beta_l$) اندازه کوچکترین $(l,k) - IDS$ (متناظراً بزرگ‌ترین مجموعه مستقل) در $G$ هستند. به‌طور مشابه، مفهوم عدد دماتیک $(l,k)$-مستقل $G$ با نمایش $d_{l,k}(G)$ قابل‌تعریف است.

قضیه زیر یک کران پایین برای عدد $k$- احاطه‌گری یک گراف ارائه می‌کند.

**قضیه ۱.۱:** [۱۱] برای هر گراف $G$ از مرتبه $n$،

$$\gamma_k(G) \geq \frac{kn}{k + \Delta(G)}.$$

به‌عنوان نتیجه‌ای فوری از قضیه ۱،۱ گزاره زیر را داریم.

**گزاره ۱.۲:** برای هر گراف مربع لاتین $L_3(L,n)$، $\gamma_3\big(L_3(L,n)\big) \geq n$.

## ۲- ترنسورسال‌ها

هر ترنسورسال در یک مربع لاتین $L$ یک مجموعه احاطه‌گر (۳و۱)- مستقل از $L_3(L,n)$ از اندازه $n$ ارائه می‌کند. قضیه زیر یک شرط کافی برای تضمین عکس این مطالب را ارائه می‌کند.

**قضیه ۱.۲:** فرض کنید $S$ یک زیرمجموعه از $V(L_3(L,n))$ باشد که در آن $L = [l_{ij}]$ یک مربع لاتین از مرتبه $n$ است. با فرض $S' = \{l_{ij}|(i,j) \in S\}$، عبارات زیر معادل‌اند.

۱- $S$ یک مجموعه ۳- احاطه‌گر از $L_3(L,n)$ از اندازه $n$ است.

۲- $S$ یک مجموعه احاطه‌گر (۳و۱)- مستقل از $L_3(L,n)$ از اندازه $n$ است.

۳- $S'$ یک ترنسورسال در $L$ است.

اثبات: به‌وضوح کافی است ثابت کنیم $i \Rightarrow iii$. بدین منظور، فرض کنید $S$ یک مجموعه ۳-احاطه‌گر از $L_3(L,n)$ از اندازه $n$ باشد. چون به‌ازای هر راس $(i,j)$،

---
[1] $k$-Dominating Set
[2] $k$-Domination Number
[3] $k$-Domatic
[4] $k$-Domatic Number
[5] Fink
[6] Jacobson
[7] Cockayne
[8] Hedetniemi

$N((i,j)) = \{i\} \times ([n]-\{j\})$
$\cup ([n]-\{i\}) \times \{j\}$
$\cup \{(p,q)|l_{pq} = l_{ij}\}$

نتیجه می‌شود که به‌ازای هر $1 \le i,j \le n$،

$|S \cap (\{i\} \times [n])| = |S \cap ([n] \times \{j\})| = 1.$

همچنین به‌ازای هر $(i,j) \notin S$ داریم $|S \cap N((i,j))| = 3$. بدون وارد شدن خللی به کلیت مسئله، می‌توان فرض کرد $l_{1j} = j$ به‌ازای $1 \le j \le n$ و

$|S \cap (\{1\} \times [n])| = \{(1,1)\}.$

لذا به‌ازای هر $2 \le j \le n$، یک $2 \le i \le n$ یکتا و یک $(p,q)$ یکتا با شرط‌های $p \ne 1$، $q \ne j$ و $l_{pq} = j$ وجود دارند. پس $S' = [n]$، یعنی $S'$ یک ترنسورسال در $L$ است.

از قضیه ۱.۲، قضیه زیر به دست می‌آید.

**قضیه ۲.۲.** به‌ازای یک مربع لاتین $L$ از مرتبه $n$، اگر $\gamma_3(L_3(L,n)) = n$، آنگاه

$d_3(L_3(L,n)) \ge d_{(1,3)}(L_3(L,n) = \tau(L).$

چون از [۱۱] می‌دانیم به‌ازای هر گراف $G$ از مرتبه $n$، $d_k(G) \le \frac{n}{\gamma_k(G)}$، لذا قضیه زیر موجود است.

**قضیه ۳.۲.** برای هر مربع لاتین $L$ از مرتبه $n$، $d_3(L_3(L,n)) \le n$، و تساوی برقرار است اگر و فقط اگر $\tau(L) = n$.

بنا بر دو قضیه از مراجع [۱۲] و [۱۹] قضیه زیر موجود است.

**قضیه ۴.۲.** فرض کنید $L$ یک مربع لاتین از مرتبه $n$ باشد. در این صورت عبارات زیر معادل‌اند.

*i*. $L$ $L$ یک زوج متعامد دارد.
*ii*. $\tau(L) = n$.
*iii*. $\chi(L_3(L,n)) = n$.

قضیه زیر از قضیه‌های ۲،۳ و ۴.۲ به دست می‌آید.

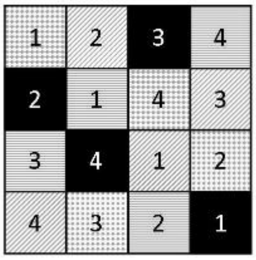
**قضیه ۵.۲.** فرض کنید $L$ یک مربع لاتین از مرتبه $n$ باشد. عبارات زیر معادل هم‌اند.

*i*. $L$ یک زوج متعامد دارد.
*ii*. $\tau(L) = n$.
*iii*. $\chi(L_3(L,n)) = n$.
*iv*. $d(L_3(L,n)) = n$.

از [۱۹] می‌دانیم که به‌ازای هر گروه $G$ از مرتبه $n$، $\tau(L_G) \ge 1$ نتیجه می‌دهد $\tau(L_G) = n$. چون قطر جدول یک گروه آبلی از مرتبه فرد $n$ یک ترنسورسال است؛ لذا $\tau(L_G) = n$. همچنین از [۲] می‌دانیم که هر مربع لاتین از مرتبه زوج دارای تعدادی زوج ترنسورسال است و از [۶] نیز می‌دانیم که به‌ازای هر گروه $G$ از مرتبه $2n$ که دارای یک عضو یکتا از مرتبه ۲ است، $\tau(L_G) = 0$. قضیه زیر بیان می‌کند که هر مربع لاتین از نوع ۲-گام و از مرتبه $2^n \ge 4$ یک تجزیه به ترنسورسال‌های مجزا دارد.

**قضیه ۶.۲.** برای هر مربع لاتین از نوع ۲-گام $L$ از مرتبه $2^n \ge 4$، $\tau(L) = 2^n$.

اثبات: برهان به استقرا روی $n \ge 2$ است. به‌ازای $n = 2$، شکل (۲) زیر تنها مربع لاتین از نوع ۲-گام از مرتبه ۴ و چهار ترنسورسال آن را نشان می‌دهد.




**شکل (۲).** تنها مربع لاتین از نوع ۲-گام از مرتبه ۴ و چهار ترنسورسال آن

لذا فرض می‌کنیم $L$ یک مربع لاتین از نوع ۲-گام از مرتبه $2^{n+1} > 4$ بوده و هر مربع لاتین از نوع ۲-گام از مرتبه $2^n$ دارای $2^n$ ترنسورسال مجزاست. ثابت می‌کنیم $\tau(L) = 2^{n+1}$. چون $L$ یک مربع لاتین از نوع $2^n$-گام نیز می‌باشد، آن را می‌توان با یک ماتریس از $2^n \times 2^n$ بلوک $A_{ij}$ به‌صورت: $L = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$، نمایش داد که در آن $A_{11} = A_{22}$ یک مربع لاتین از نوع ۲-گام روی مجموعه نماد $X = \{1,2,\dots,2^n\}$ و $A_{12} = A_{21}$ یک مربع لاتین از نوع ۲- گام روی مجموعه نماد:$2^n + X = \{2^n + i | i \in X\}$ بوده و درایه $(i,j)$ در $A_{12}$ مجموع درایه $(i,j)$ از $A_{11}$ با $2^n$ است. در واقع به‌ازای تناظر یک‌به‌یک $\sigma: X \to 2^n + X$ با ضابطه $\sigma(i) = i + 2^n$ داریم $A_{12} = \sigma(A_{11})$. حال فرض کنید:

$$A_{11} = (A'_{11}, A''_{11}), \qquad A_{12} = (A'_{12}, A''_{12})$$
$$A_{21} = (A'_{21}, A''_{21}), \qquad A_{22} = (A'_{22}, A''_{22})$$

که در آن‌ها $A'_{ij}$ و $A''_{ij}$ها مستطیل‌های لاتین از اندازه $2^{n-1} \times 2^n$ هستند. فرض کنید $T$ یک ترنسورسال در:

$A := A_{11} = A_{22}$

بوده و $T_{11}$ و $T_{22}$ به ترتیب نام $T$ در $A_{11}$ و $A_{22}$ باشند. قرار دهید

$T_{11} = (T'_{11}, T''_{11})$ و $T_{22} = (T'_{22}, T''_{22})$ که در آنها $T'_{ii} = T_{ii} \cap A'_{ii}$ و $T''_{ii} = T_{ii} \cap A''_{ii}$. در این صورت $(\sigma(T''_{11}), \sigma(T'_{11}))$ یک ترنسورسال در $A_{12} = A_{21}$ خواهد بود. فرض کنید $T_{12}$ و $T_{21}$ بترتیب نام‌های $(\sigma(T''_{11}), \sigma(T'_{11}))$ در $A_{12}$ و $A_{21}$ باشند. چون:

$$T_1 = T'_{11} \cup T''_{22} \cup T''_{12} \cup T'_{21},$$
$$T_2 = T''_{11} \cup T'_{22} \cup T'_{12} \cup T''_{21},$$

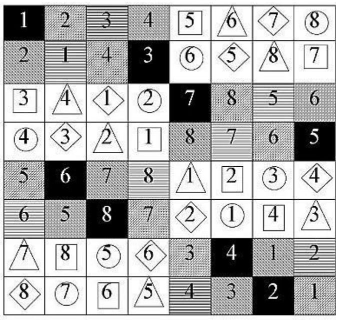
دو ترنسورسال مجزا در $L$ هستند و $\tau(A) = 2^n$؛ لذا $\tau(L) = 2^{n+1}$. به‌عنوان مثال شکل‌های (۳، ۴ و ۵) را ببینید. □

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 2 | 1 | 4 | 3 |
| 3 | 4 | 1 | 2 |
| 4 | 3 | 2 | 1 |

**شکل (۳).** نمایش $A \coloneqq A_{11} = A_{22}$ و یک ترنسورسال

| | $A_{11}$ | | | | $A_{12}$ | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A'_{11}$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | $A'_{12}$ |
| | 2 | 1 | 4 | 3 | 6 | 5 | 8 | 7 | |
| $A''_{11}$ | 3 | 4 | 1 | 2 | 7 | 8 | 5 | 6 | $A''_{12}$ |
| | 4 | 3 | 2 | 1 | 8 | 7 | 6 | 5 | |
| $A'_{21}$ | 5 | 6 | 7 | 8 | 1 | 2 | 3 | 4 | $A'_{22}$ |
| | 6 | 5 | 8 | 7 | 2 | 1 | 4 | 3 | |
| $A''_{21}$ | 7 | 8 | 5 | 6 | 3 | 4 | 1 | 2 | $A''_{22}$ |
| | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | |
| | $A_{21}$ | | | | $A_{22}$ | | | | |

**شکل (۴).** افراز یک مربع لاتین از نوع ۲-گام از مرتبه $2^3$




**شکل (۵).** یک مربع لاتین از نوع ۲-گام از مرتبه $2^3$ و ترنسورسال‌هایش

نتیجه زیر از قضیه‌های ۱.۱ و ۵.۲ به دست می‌آید.

**نتیجه ۷.۲.** به‌ازای هر مربع لاتین از نوع ۲-گام $L$ از مرتبه $2^n \geq 4$، $d_3(L_3(L_G, 2^n)) = 2^n$.

## ۳. شبه-ترنسورسال‌ها

بنابر قضیه‌های موجود درباره ترنسورسال‌ها، مربعات لاتین زیادی وجود دارند که هیچ ترنسورسالی ندارند، اما یک مجموعه از درایه‌ها از اندازه $n+1$ دارند که شامل دقیقاً دو درایه از یک سطر (و یک ستون) و دقیقاً یک درایه از هر سطر (و ستون) دیگر بوده و همه نمادها بجز یک مورد از آنها فقط یک بار در آن ظاهر می‌شوند. این امر ما را به تعریف بعدی سوق می‌دهد.

**تعریف ۱.۳.** یک شبهه-ترنسورسال[1] در یک مربع لاتین از مرتبه $n$ یک مجموعه از درایه‌ها از اندازه $n+1$ است که شامل دقیقاً دو درایه از یک سطر (و ستون) و دقیقاً یک درایه از هر سطر (و ستون) دیگر بوده و همه نمادها بجز یک مورد از آنها فقط یک بار در آن ظاهر می‌شوند. بیشترین تعداد از شبهه-ترنسورسال‌های مجزا در یک مربع لاتین $L$ را عدد شبهه-ترنسورسال آن نامیده و با $\tau^{qua}(L)$ نمایش می‌دهیم.

واضح است که به‌ازای هر مربع لاتین $L = [l_{ij}]$ از مرتبه $n$، $\tau^{qua}(L) \leq \left\lfloor \frac{n^2}{n+1} \right\rfloor$. گزاره بعدی بیان می‌کند که چه هنگام یک شبهه-ترنسورسال در یک مربع لاتین یک مجموعه ۳-احاطه‌گر در گراف مربع لاتین متناظر آن مربع لاتین است.

**گزاره ۳،۲.** هر شبهه-ترنسورسال در یک مربع لاتین از مرتبه $n \geq 3$ متناظر با یک مجموعه ۳-احاطه‌گر از مرتبه $n+1$ در گراف مربع لاتین متناظر آن مربع لاتین است.

اثبات. همچنان که در شکل ۶ نشان داده شده است، به‌ازای $n = 3$، فقط یک کلاس آیزوتوپی از مربعات لاتین مرتبه ۳ وجود داشته که آن هم فقط یک شبهه-ترنسورسال دارد.

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 2 | 3 | 1 |
| 3 | 1 | 2 |

**شکل (۶).** تنها کلاس آیزوتوپی از مربعات لاتین مرتبه ۳

لذا فرض می‌کنیم $n \geq 4$. واضح است که هر شبهه- ترنسورسال در یک مربع لاتین از مرتبه $n \geq 3$ یک مجموعه ۳- داحاطه‌گر از مرتبه $n+1$ در گراف مربع لاتین آن است. فرض کنید $T$ یک مجموعه ۳-احاطه‌گر در $L_3(L,n)$ از اندازه $n+1 \geq 5$ بوده و فرض کنید

$$R_i = \{(i,j) \in V(L_3(L,n)) | (i,j) \in T\},$$
$$C_i = \{(i,j) \in V(L_3(L,n)) | (i,j) \in T\},$$
$$S_i = \{(p,q) \in V(L_3(L,n)) | \ell_{pq} = i\}$$

سه مجموعه به ترتیب از اندازه‌های $r_i$، $c_i$ و $s_i$ باشند. در این صورت:

$$\begin{aligned} T &= R_1 \cup R_2 \cup \ldots \cup R_n \\ &= C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_n \\ &= S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_n, \end{aligned}$$

و لذا:

$$\sum_{i=1}^{n} r_i = \sum_{i=1}^{n} c_i = \sum_{i=1}^{n} s_i = n + 1.$$

1. quasi-transversal

نشان خواهیم داد که مجموعه $T' = \{\ell_{ij} | (i,j) \in T\}$ یک شبهه-ترنسورسال در $L$ است. برای این منظور، کافی است با کمک مفهوم زوج متعامد ثابت کنیم به‌ازای هر $1 \le i \le n$، $r_i \neq 0$. فرض کنید $I = \{i | r_i = 0\}$ یک مجموعه از اندازه $\ell \ge 1$ باشد. بدون کاستن از کلیت مسئله، می‌توان فرض کرد $|\{i | s_i = 0\}| \ge \ell$ و $|\{i | c_i = 0\}| \ge \ell$. فرض کنید $J = \{i | c_i = 0\}$. این نتیجه می‌دهد که اگر $\alpha_{ij}$ نماد موجود در محل تلاقی سطر $i$ و ستون $j$ باشد وقتی که $i \in I$ و $j \in J$، آنگاه $s_{\alpha_{ij}} \ge 3$. فرض کنید:

$$K = \left\{ t \middle| j \in J, i \in I \text{ که } \alpha_{ij}, \alpha_{ij} \in T \text{ در ستون } t \text{ ام قرار می‌گیرد} \right\}$$

به‌وضوح $|K| \ge \ell$. پس اگر $K' = \{i | 1 \le i \le n\} - J \cup K$، آنگاه:

$$\begin{aligned} n + 1 &= |T| \\ &= \textstyle\sum_{i \in K'} c_i + \sum_{i \in K} c_i \\ &\ge (n - 2\ell) + 3\ell \\ &= n + \ell, \end{aligned}$$

که نتیجه می‌دهد $\ell = 1$. پس، بدون از دست دادن کلیت مسئله، در نظر می‌گیریم $r_1 = c_1 = s_{\alpha_1} = 0$ به‌ازای برخی $\alpha_1 \neq 1$ و $\ell_{1,j} = \ell_{j,1} = j$ به‌ازای $1 \le j \le n$ و $c_1 \le c_2 \le \cdots \le c_n$. چون $c_j \le 3$ به‌ازای $2 \le j \le n$، نتیجه می‌شود $(c_2, c_3, \dots, c_n)$ برابر است با $(1,1,\dots,1,3)$ یا $(1,\dots,1,2,2)$.

این نتیجه می‌دهد که $r_i \le 2$ به‌ازای هر $i$. چون برای ۳-احاطه‌گری راس $(\alpha_1, 1)$ حداقل سه راس از $T$ لازم است، لذا شرط $r_1 = c_1 = s_{\alpha_1} = 0$ نتیجه می‌دهد $r_{\alpha_1} \ge 3$، که یک تناقض است؛ بنابراین $T'$ یک شبهه-ترنسورسال در $L$ از اندازه $n + 1$ است.

قضیه بعدی یک خانواده از مربعات لاتین از مرتبه $n$ را ارائه می‌دهد که هیچ ترنسورسالی نداشته اما یک شبهه-ترنسورسال دارد که نتیجه می‌دهد که عدد ۳-احاطه‌گری گراف مربع لاتین آن برابر $n + 1$ است. ابتدا یک قضیه از [۲۰] را یادآوری می‌کنیم.

**قضیه ۳.۳.** [۲۰] به‌ازای اعداد صحیح فرد مثبت $q$ و $k$ و عدد صحیح زوج مثبت $m$، هیچ مربع لاتین از نوع $q$-گام از مرتبه $mq$ که یک $k$-ترنسورسال داشته باشد، وجود ندارد.

**قضیه ۳،۴.** به‌ازای هر مربع لاتین از نوع $q$-گام از مرتبه زوج $n = mq$ که زیر مربع‌های لاتین از مرتبه $q$ آن دوری‌اند و $m$ زوج و $q$ فرد،

$$\gamma_3\big(L_3(L,n)\big) = n + 1.$$

(بنا بر قضیه‌های ۱.۲ $\gamma_3\big(L_3(L,n)\big) \ge n + 1$ اثبات. چون و ۳،۳)، کافی است عکس این نامساوی را ثابت کنیم.

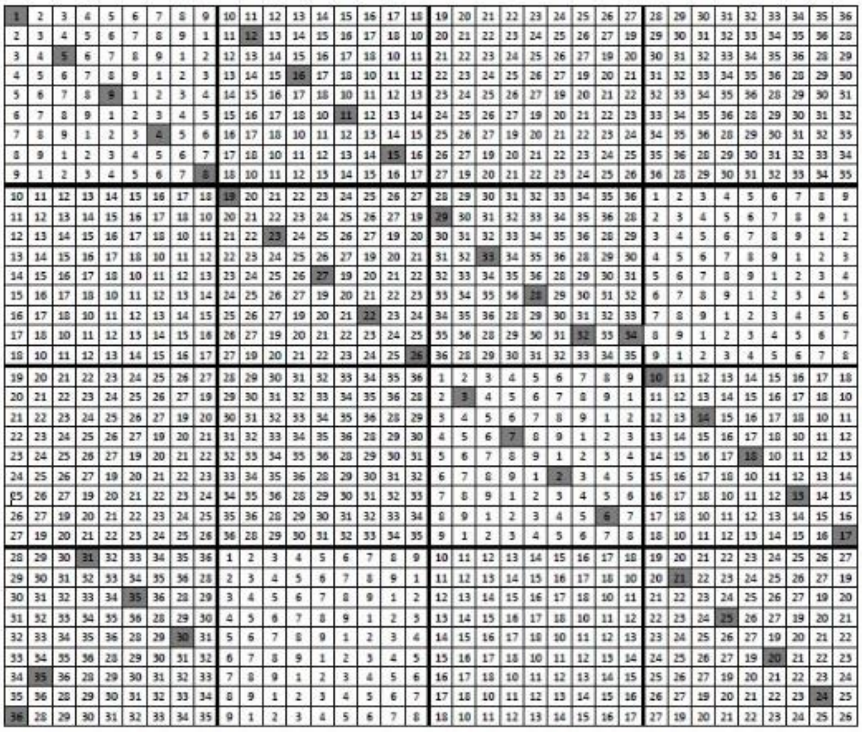
حالت ۱. چون $q = 1$.

$$\begin{aligned} S = &\left\{ (i,i) | 1 \le i \le \tfrac{n}{2} \right\} \\ &\cup \left\{ (i, i+1) | \tfrac{n}{2} + 1 \le i \le n \right\} \\ &\cup \left\{ \left( \tfrac{n}{2} + 1, \tfrac{n}{2} + 1 \right) \right\} \end{aligned}$$

یک مجموعه ۳- احاطه‌گر از $L_3(L,n)$ از اندازه $n + 1$ است، داریم $\gamma_3\big(L_3(L,n)\big) = n + 1$.

حالت ۲. چون $q \neq 1$.

$$\begin{aligned} S = &\left\{ (qj + 2i + 1, qj + 2i + 1) | 0 \le i \le \tfrac{q-1}{2}, 0 \le j \le \tfrac{m}{2} - 1 \right\} \\ &\cup \left\{ \left( qj + 2i + 1 + \frac{n}{2}, q(j+1) + 2i + 1 + \frac{n}{2} \right) | 0 \le i \le \frac{q-1}{2}, 0 \le j \le \frac{m}{2} - 2 \right\} \\ &\cup \left\{ (qj + 2i + 2, q(j+1) + 2i + 2 | 0 \le i \le \frac{q-3}{2}, 0 \le j \le \frac{m}{2} - 2 \right\} \\ &\cup \left\{ \left( qj + 2i + 2 + \frac{n}{2}, qj + 2i + 2 + \frac{n}{2} \right) | 0 \le i \le \frac{q-3}{2}, 0 \le j \le \frac{m}{2} - 1 \right\} \\ &\cup \left\{ \left( 2i + 2 - q + \tfrac{n}{2}, 2i + 1 + \tfrac{n}{2} \right) | 0 \le i \le \tfrac{q-3}{2} \right\} \\ &\cup \left\{ (2i + 1 - q + n, 2i + 4) | 0 \le i \le \tfrac{q-5}{2} \right\} \\ &\cup \left\{ \left( \tfrac{n}{2} - 1, \tfrac{n}{2} + q \right), (n - 2, 2), (n, 1) \right\} \end{aligned}$$



**شکل (۷)**. یک مجموعه ۳-احاطه‌گر از یک مربع لاتین از نوع ۹-گام با $(n,m,q)=(36,4,9)$

یک مجموعه ۳-احاطه‌گر از $L_3(L,n)$ از اندازه $n+1$ است، داریم $\gamma_3(L_3(L,n))=n+1$. به‌عنوان مثال، شکل ۷ یک مربع لاتین ۹-گام از مرتبه ۳۶ و یک شبهه-ترنسورسال را نشان می‌دهد.

**نتیجه ۳،۵.** به‌ازای هر گروه دوری $G$ از مرتبه زوج $n$، $d_3(L_3(L_G,n))=\left\lfloor\frac{n^2}{n+1}\right\rfloor$.

اثبات. بنا بر قضیه ۴.۳ داریم $\gamma_3(L_3(L_G,n)=n+1$. تعریف می‌کنیم:

$$S_j=\begin{cases} T_j\cup\left\{\left(j+\frac{n}{2},j+\frac{n}{2}\right)\right\}, & 1\le j\le\frac{n}{2},\\ T_j\cup\left\{\left(j+\frac{n}{2}+1,j+\frac{n}{2}\right)\right\}, & \frac{n}{2}\le j<n-1\\ T_j\cup\left\{\left(\frac{n}{2},\frac{n}{2}-1\right),\left(1,\frac{n}{2}\right)\right\}, & j=n-1,\end{cases}$$

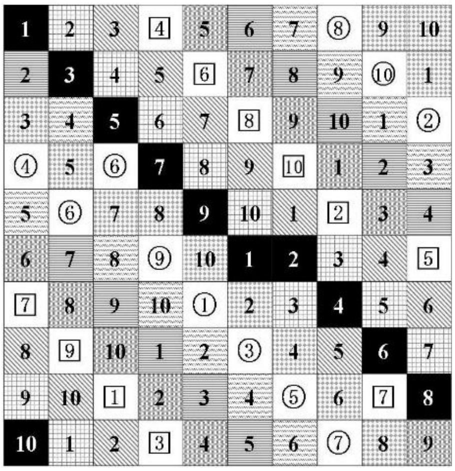
که در آن $1\le j\le n-1$ و

$$T_j=\left\{(i,i+j-1),\left(i+\frac{n}{2},i+\frac{n}{2}+j\right)\middle|1\le i\le\frac{n}{2}\right\}.$$

چون مجموعه‌های $S_j$ تعداد $n-1$ مود مجموعه ۳-احاطه‌گر مجزا از $L_3(L_G,n)$ هستند، لذا $d_3(L_3(L_G,n))\ge n-1$. از طرف دیگر، چون $d_3(L_3(L_G,n))\le\frac{n^2}{n+1}$ نتیجه می‌دهد:

$$d_3(L_3(L_G,n))\le n-1,$$

لذا $d_3(L_3(L_G,n))=\left\lfloor\frac{n^2}{n+1}\right\rfloor$. شکل (۸) تعداد ۹ مورد مجموعه ۳-احاطه‌گر مجزا از یک مربع لاتین دوری از مرتبه ۱۰ را نشان می‌دهد.



**شکل (۸)**: ۹ مورد مجموعه ۳- احاطه‌گر مجزا از یک مربع لاتین دوری از مرتبه ۱۰

به‌عنوان نتیجه‌ای از قضیه‌های ۱.۲، ۳.۳ و ۴.۳، نتیجه زیر یک خانواده از مربعات لاتین که هیچ ترنسورسال نداشته، اما یک شبهه-ترنسورسال دارند را ارائه می‌دهد.

**نتیجه ۶.۳.** هر مربع لاتین از نوع $q$-گام از مرتبه زوج $n=mq$ که زیرمربع‌های لاتین از مرتبه فرد $q$ آن دوری است، هیچ ترنسورسالی ندارد اما یک شبهه-ترنسورسال دارد.

بنا بر نتیجه ۶.۳، به‌ازای هر $n$ زوج، جدول کیلی گروه جمعی $\mathbb{Z}_n$، که یک مربع لاتین ۱-گام است، یک شبهه-ترنسورسال دارد درحالی‌که هیچ ترنسورسالی ندارد.

## ۴- حدس رودنی

رودنی در [۱۷] حدس زیر را ارائه کرده است:

**حدس ۱.۴.** [۱۷] هر مربع لاتین یک ۲-ترنسورسال دارد.

در اینجا درستی این حدس را برای خانواده‌ای از مربعات لاتین ثابت می‌کنیم.

**قضیه ۴.۲.** هر مربع لاتین از نوع $q$-گام $L$ از مرتبه زوج $n = mq$ که زیرمربع‌های لاتین آن از مرتبه فرد $q$ دوری است، دارای یک ۲-ترنسورسال است.

اثبات. برهان در سه حالت زیر ارائه می‌شود:

حالت ۱. $q = 1$. مجموعه

$$S = \left\{\ell_{i,i} | 1 \le i \le \frac{n}{2}\right\} \cup \left\{\ell_{i,i+1} | \frac{n}{2} + 1 \le i \le n\right\} \cup \left\{\ell_{n/2+1,n/2,1}\right\}$$

یک شبهه-ترنسورسال در $L$ است که در آن $\ell_{1,1} = \ell_{n/2+1,n/2,1} = 1$ و مجموعه:

$$S' = \left\{\ell_{i,i+1} \mid 1 \le i \le \frac{n}{2}\right\} \cup \left\{\ell_{i,i} \mid \frac{n}{2} + 1 \le i \le n\right\}$$

یک نزدیک-ترنسورسال در $L$ است که درایه ۱ از سطر $\left(\frac{n}{2} + 1\right)$–ام و ستون $\left(\frac{n}{2} + 1\right)$–ام آن حذف شده است. پس $S \cup S'$ یک ۲-ترنسورسال در $L$ است. زیرا $S \cap S' = \phi$.

حالت ۲. $q \neq 1$ و $m = 2$. مجموعه

$$S = \left\{\ell_{2i+1,2i+1} | 1 \le i \le q - 1\right\} \cup \left\{(\ell_{2i+2,2i+3+\frac{n}{2}} | 0 \le i \le \frac{q-3}{2}\right\} \cup \left\{(\ell_{2i+1+\frac{n}{2},2i+2} | 0 \le i \le \frac{q-3}{2}\right\} \cup \left\{(\ell_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}+1}, \ell_{n,1}\right\}$$

یک شبهه-ترنسورسال $L$ است که $\ell_{n,1} = \ell_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}+1} = n$ و مجموعه:

$$S' = \left\{\ell_{2i+2,2i+2} | 1 \le i \le q - 1\right\} \cup \left\{(\ell_{2i+1,2i+2+\frac{n}{2}} | 0 \le i \le \frac{q-3}{2}\right\} \cup \left\{(\ell_{2i+2+\frac{n}{2},2i+3} | 0 \le i \le \frac{q-3}{2}\right\}$$

یک نزدیک-ترنسورسال در $L$ است که درایه $n$ در سطر $\frac{n}{2}$–ام و ستون اول حذف شده است. چون $S \cap S' = \phi$، لذا $S \cup S'$ یک ۲-ترنسورسال در $L$ است.

حالت ۳. $q \neq 1$ و $m \neq 2$. چون مجموعه:

$$S' = \left\{\ell_{qj+2i+1,qj+2i+1} | 0 \le i \le \frac{q-1}{2}, 0 \le j \le \frac{m}{2} - 1\right\}$$
$$\cup \left\{(\ell_{qj+2i+1+\frac{n}{2},q(j+1)+2i+1+\frac{n}{2}} | 0 \le i \le \frac{q-1}{2}, 0 \le j \le \frac{m}{2} - 2\right\}$$
$$\cup \left\{(\ell_{qj+2i+2,q(j+1)+2i+2} | 0 \le i \le \frac{q-3}{2}, 0 \le j \le \frac{m}{2} - 2\right\}$$
$$\cup \left\{(\ell_{qj+2i+2+\frac{n}{2},qj+2i+2+\frac{n}{2}} | 0 \le i \le \frac{q-3}{2}, 0 \le j \le \frac{m}{2} - 1\right\}$$
$$\cup \left\{(\ell_{2i+2+\frac{n}{2}-q,2i+1+\frac{n}{2}} | 0 \le i \le \frac{q-3}{2}\right\}$$
$$\cup \left\{(\ell_{n-2i,q-(2i+1)} | 0 \le i \le \frac{q-3}{2}\right\}$$
$$\cup \left\{(\ell_{\frac{n}{2}+1-q,\frac{n}{2}+q}, \ell_{n-q+1,q}\right\}$$

یک شبهه-ترنسورسال در $L$ است که $\ell_{\frac{n}{2}+1-q,\frac{n}{2}+q} = \ell_{n-q+1,q} = n$ و مجموعه:

$$S' = \left\{\ell_{qj+2i+2,qj+2i+2} | 0 \le t \le \frac{q-3}{2}, 0 \le j \le \frac{m}{2} - 1\right\}$$
$$\cup \left\{(\ell_{qj+2i+1+\frac{n}{2},qj+2i+1+\frac{n}{2}} | 0 \le i \le \frac{q-1}{2}, 0 \le j \le \frac{m}{2} - 1\right\}$$
$$\cup \left\{(\ell_{qj+2i+1,q(j+1)+2i} | 0 \le i \le \frac{q-1}{2}, 0 \le j \le \frac{m}{2} - 2\right\}$$
$$\cup \left\{(\ell_{qj+2i+2+\frac{n}{2},q(j+1)+2i+2+\frac{n}{2}} | 0 \le i \le \frac{q-3}{2}, 0 \le j \le \frac{m}{2} - 2\right\}$$
$$\cup \left\{(\ell_{2i+3-q+\frac{n}{2},2i+2+\frac{n}{2}} | 0 \le i \le \frac{q-3}{2}\right\}$$
$$\cup \left\{(\ell_{n-(2i+1),q-(2i+2)} | 0 \le i \le \frac{q-3}{2}\right\}$$

یک نزدیک-ترنسورسال در $\boldsymbol{L}$ است که درایه $\boldsymbol{n}$ در سطر $\left(\frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{2}} + \boldsymbol{1} - \boldsymbol{q}\right)$–ام و ستون $\boldsymbol{q}$–ام حذف شده است. دوباره چون $\boldsymbol{S} \cap \boldsymbol{S}' = \boldsymbol{\phi}$، لذا $\boldsymbol{S} \cup \boldsymbol{S}'$ یک ۲-ترنسورسال از $\boldsymbol{L}$ است.

## ۵- مراجع

[1] H. Ning, F. Farha, Z. N. Mohammad & M. Daneshmand, "A Survey and Tutorial on “Connection Exploding Meets Efficient Communication” in the Internet of Things," in IEEE Internet of Things Journal, vol. 7, no. 11, pp. 10733-10744, Nov. 2020.

[2] V. Hassija, V. Chamola, V. Saxena, D. Jain, P. Goyal & B. Sikdar, "A Survey on IoT Security: Application Areas, Security Threats, and Solution Architectures," in IEEE Access, vol. 7, pp. 82721-82743, 2019.

[3] C. H. Liao, H. -H. Shuai & L. C. Wang, "Eavesdropping prevention for heterogeneous Internet of Things systems," 2018 15th IEEE Annual Consumer Communications & Networking Conference (CCNC), pp. 1-2, 2018.

[4] S. A. Mohajeran & G. A. Hodtani, "Power Allocation for Wireless Sensor Networks in the Presence of Non-Gaussian Noise and Hardware Impairments Using Distance-Related Bounds," in IEEE Sensors Letters, vol. 5, no. 4, pp. 1-4, April 2021.

[5] G. Ding, X. Gao, Z. Xue, Y. Wu & Q. Shi, ”Massive MIMO for Distributed Detection With Transceiver Impairments,” in IEEE Transactions on Vehicular Technology, vol. 67, no. 1, pp. 604-617, Jan. 2018.

[6] C. Mollén, U. Gustavsson, T. Eriksson & E. G. Larsson, "Impact of Spatial Filtering on Distortion From Low-Noise Amplifiers in Massive MIMO Base Stations," in IEEE Transactions on Communications, vol. 66, no. 12, pp. 6050-6067, Dec. 2018

[7] P. Williams, P. Rojas & M. Bayoumi, "Security Taxonomy in IoT – A Survey," 2019 IEEE 62nd International Midwest Symposium on Circuits and Systems (MWSCAS), pp. 560-565, 2019.

[8] N. Sklavos & I. D. Zaharakis, "Cryptography and Security in Internet of Things (IoTs): Models, Schemes, and Implementations," 2016 8th IFIP International Conference on New Technologies, Mobility and Security (NTMS), pp. 1-2, 2016.

[9] J. Zhang, S. Rajendran, Z. Sun, R. Woods & L. Hanzo, "Physical Layer Security for the Internet of Things: Authentication and Key Generation," in IEEE Wireless Communications, vol. 26, no. 5, pp. 92-98, October 2019.

[10] Y. Chen, W. Li & H. Shu, "Wireless physical-layer security with multiple receivers and eavesdroppers: Outage probability and average secrecy capacity," 2015 IEEE 26th Annual International Symposium on Personal, Indoor, and Mobile Radio Communications (PIMRC), pp. 662-667, 2015.

[11] M. Obeed & W. Mesbah, "An efficient physical layer security algorithm for two-way relay systems," 2016 IEEE Wireless Communications and Networking Conference, pp. 1-6, 2016.

[12] A. Sonee & G. A. Hodtani, "On the Secrecy Rate Region of Multiple-Access Wiretap Channel With Noncausal Side Information," in IEEE Transactions on Information Forensics and Security, vol. 10, no. 6, pp. 1151-1166, June 2015.

[13] Y. Liang, H. V. Poor & S. Shamai, “Information Theoretic Security, Delft,” The Netherlands: Now Publishers, 2009.

[14] T. Cover, & J. Thomas, “Elements of Information Theory,” 2nd Edition, Wiley, (2006).

[15] T. T. Duy & V. N. Q. Bao, "Performance analysis of cooperativebased multi-hop transmission protocols in underlay cognitive radio with hardware impairment," VNU Journal of Computer Science and Communication Engineering, vol. 31, no. 2, pp. 15-28, 2015.

[16] J. Mo, M. Tao, & Y. Liu, "Relay placement for physical layer security: A secure connection perspective," IEEE Commun. Lett., vol. 16, no. 6, pp. 878-881, Jun. 2012.

[17] V. N. Q. Bao, N. L. Trung, & M. Debbah, "Relay selection schemes for dual-hop networks under security constraints witb multiple eavesdroppers," IEEE Trans. Wire!' Commun., vol. 12, no. 12, pp. 6076-6085, Otc. 2013.