Journal of Electronical & Cyber Defence
Vol. 9, No. 3, 2021, Serial No. 35

The -Adjacency Domination in Graphs

D. Bakhshesh*

*Department of Computer Science, University of Bojnord, Bojnord, Iran

(Received: 16/12/2020, Accepted: 16/03/2021)

ABSTRACT

Let be a simple and undirected graph with vertex set . A set is called a dominating set of if every vertex outside is adjacent to at least one vertex of . For any integer , a dominating set is called a -adjacency dominating set of if the induced subgraph contains at least one vertex of degree at most . The minimum cardinality of a - adjacency dominating set of is called the - adjacency domination number of that is denoted by . In this paper, the study of - adjacency domination in graphs is initiated, and exact values and some bounds on the - adjacency domination number of a given graph are presented. Furthermore, it is shown that there is a polynomial-time algorithm that computes the -adjacency domination number of a given tree. Moreover, it is proven that the decision problem associated to the -adjacency domination is NP-complete for bipartite graphs.

Keywords: : Dominating Set, Graph, Domination Number

* Corresponding Author Email: d.bakhshesh@ub.ac.ir

نشریه علمی "پدافند الکترونیکی و سایبری"
سال نهم، شماره ۳، پاییز ۱۴۰۰، ص ۱۳۱- ۱۲۵

علمی- پژوهشی

احاطه‌گر k- مجاورت در گراف‌ها

داود بخشش*
استادیار، گروه آموزشی علوم کامپیوتر، دانشگاه بجنورد، ایران

(دریافت: ۱۳۹۹/۰۹/۲۶، پذیرش: ۱۳۹۹/۱۲/۰۷)

چکیده

فرض کنید G یک گراف ساده و بدون دور با مجموعه رئوس V باشد. یک مجموعه S که زیرمجموعه V است را احاطه‌گر گویند هرگاه هر رأسی که خارج از S است با حداقل یک رأس در S همجوار باشد. فرض کنید $k \geq 1$ عددی صحیح باشد. مجموعه احاطه‌گر S را یک مجموعه احاطه‌گر k- مجاورت می‌نامیم هرگاه زیرگراف القائی $G[S]$ شامل رأسی از درجه حداکثر $k-1$ باشد. کمترین تعداد عناصر یک مجموعه احاطه‌گر k- مجاورت برای گراف G عدد احاطه k- مجاورت آن گراف نامیده می‌شود و با نماد $\gamma_k^a(G)$ نمایش داده می‌شود. در این مقاله، مطالعه احاطه‌گر k- مجاورت آغاز می‌شود. سپس مقادیر دقیق و کران‌هایی برای عدد احاطه k- مجاورت یک گراف داده شده ارائه می‌شود. همچنین، نشان داده می‌شود که یک الگوریتم با زمان چندجمله‌ای برای محاسبه عدد احاطه k- مجاورت یک درخت داده شده وجود دارد. علاوه بر این، ثابت می‌شود که مسئله تصمیم‌گیری مرتبط با احاطه‌گر k- مجاورت برای گراف‌های دوبخشی NP- کامل است.

کلید واژه‌ها: مجموعه احاطه‌گر، گراف، عدد احاطه

۱- مقدمه

در دنیای امروزی، امنیت اطلاعات اهمیت زیادی پیدا کرده است. اخیراً، با توجه به رشد سریع اطلاعات و انتقال آن از طریق اینترنت، استفاده از روش‌های انتقال امن اطلاعات بسیار مورد توجه قرار گرفته است. عدم وجود کانال ارتباطی امن جهت انتقال اطلاعات، احتمال هک شدن اطلاعات توسط هکرها را افزایش می‌دهد. بنابراین، جهت انتقال امن اطلاعات از رمزنگاری استفاده می‌شود. تاکنون روش‌های زیادی برای این کار پیشنهاد شده است. یکی از این روش‌ها استفاده از احاطه‌گرها است (فصل ۴، کتاب [۱]، مقالات [۲ و ۳]). فرض کنید که $G=(V,E)$ یک گراف با مجموعه رئوس V و مجموعه یال‌های E باشد. مجموعه $S \subseteq V$ یک *احاطه‌گر گراف* G نامیده می‌شود هرگاه برای هر عضو $v \in V-S$، رأسی مانند $u \in S$ وجود داشته باشد به طوری که $uv \in E$. کمترین تعداد عناصر یک مجموعه احاطه‌گر G *عدد احاطه* G نامیده می‌شود و با نماد $\gamma(G)$ نمایش داده می‌شود. یک مجموعه احاطه‌گر G با اندازه $\gamma(G)$ به اختصار $\gamma(G)$- مجموعه نامیده می‌شود. تاکنون، کارهای تحقیقاتی زیادی در زمینه احاطه‌گرها انجام شده است. جهت مطالعه کلیات مجموعه‌های احاطه‌گر و انواع آن، خواننده به کتاب [۱] ارجاع داده می‌شود.

همسایگی باز یک رأس $v \in V$، که با نماد $N(v)$ نمایش داده می‌شود، به صورت زیر تعریف می‌شود: $N(v)=\{u \in V | vu \in E\}$. تعداد اعضای مجموعه $N(v)$ درجه v در گراف G نامیده می‌شود. همچنین *همسایگی بسته* v که با $N[v]$ نمایش داده می‌شود به‌صورت زیر تعریف می‌شود: $N[v]=N(v) \cup \{v\}$. برای یک مجموعه $S \subseteq V$، زیرگرافی از G که توسط S القا می‌شود با $G[S]$ نمایش داده می‌شود. فرض کنید u رأسی در S باشد. مجموعه *همسایگی خصوصی* u نسبت به مجموعه S که با نماد $pn[u,S]$ نمایش داده می‌شود به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$pn[u,S]=\{v \in V | N[v] \cap S = \{u\}\}$ و مجموعه همسایگی خصوصی خارجی u نسبت به مجموعه S که با نماد $epn[u,S]$ نمایش داده می‌شود به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$epn[u,S]=\{v \in V | N(v) \cap S = \{u\}$.

با توجه به کاربردهای مختلف احاطه‌گرها انواع مختلفی از آن‌ها نیز وجود دارد. در مرجع [۴] مفهوم احاطه‌گر مجزا ارائه شده است. مجموعه $S \subseteq V$ /*احاطه‌گر مجزای گراف* G نامیده می‌شود، هرگاه S مجموعه احاطه‌گر G باشد و زیرگراف القائی $G[S]$ شامل حداقل یک رأس تنها (رأس از درجه صفر در $G[S]$) باشد. کمترین تعداد عناصر یک مجموعه احاطه‌گر مجزای G عدد احاطه مجزای G نامیده می‌شود و با نماد $\gamma_0(G)$ نمایش داده می‌شود. یک مجموعه احاطه‌گر مجزای G با اندازه $\gamma_0(G)$ به اختصار $\gamma_0(G)$- مجموعه نامیده می‌شود. در مرجع [۴] تعدادی کران و مقادیر دقیق عدد احاطه مجزای برخی از گراف‌ها ارائه شده است. جعفری راد [۵] نشان داد که مسئله احاطه مجزا برای گراف‌های دوبخشی یک مسئله NP- کامل است.

*رایانامه نویسنده مسئول: d.bakhshesh@ub.ac.ir

ناشر: دانشگاه جامع امام حسین (ع)

در این مقاله، تعمیمی از احاطه‌گر مجزا در گراف‌ها معرفی می‌شود. فرض کنید که $k \geq 1$ عددی صحیح باشد. یک مجموعه S احاطه‌گر k-مجاور نامیده می‌شود، هرگاه S احاطه‌گر باشد و گراف القائی $G[S]$ شامل حداقل یک رأس از درجه حداکثر $k-1$ باشد. کمترین تعداد عناصر یک مجموعه احاطه‌گر k-مجاورت گراف G عدد احاطه k- مجاورت G نامیده می‌شود و با نماد $\gamma_k^a(G)$ نمایش داده می‌شود. یک مجموعه احاطه‌گر k- مجاورت با تعداد عناصر $\gamma_k^a(G)$ یک $\gamma_k^a(G)$-مجموعه نامیده می‌شود. *واضح است که اگر $k = 1$، مجموعه احاطه‌گر k- مجاورت همان مجموعه احاطه‌گر مجزا است.* لازم به ذکر است که در مرجع [۶] نوع دیگری از احاطه‌گرها با عنوان احاطه‌گر k- مجزا ارائه شده است که تعمیم دیگری از احاطه‌گر مجزا می‌باشد. یک مجموعه احاطه‌گر S، احاطه‌گر k- مجزا نامیده می‌شود هرگاه زیرگراف القائی $G[S]$ شامل حداقل k رأس تنها باشد. واضح است که تعریف احاطه‌گر k- مجاورت با تعریف احاطه‌گر k- مجزا متفاوت است. در این مقاله، مقادیر دقیق و کران‌هایی برای عدد احاطه k-مجاورت یک گراف داده شده ارائه می‌شود. همچنین، نشان داده می‌شود که یک الگوریتم با زمان چندجمله‌ای برای محاسبه عدد احاطه k- مجاورت یک درخت داده شده وجود دارد. علاوه بر این، ثابت می‌شود که مسئله تصمیم‌گیری مرتبط با احاطه‌گر k-مجاورت برای گراف‌های دوبخشی NP- کامل است.

۲- کران‌ها و مقادیر دقیق

در این بخش، تعدادی کران و مقادیر دقیق عدد احاطه‌گر k-مجاورت برخی از گراف‌ها ارائه می‌شود.

مشاهده ۱. برای هر عدد صحیح $k \geq 1$ و هر گراف کامل K_n، $\gamma_k^a(K_n) = 1$.

از آنجایی که هر مجموعه احاطه‌گر $(k-1)$-مجاورت گراف G خود نیز یک مجموعه احاطه‌گر k-مجاورت است، بنابراین نتیجه زیر حاصل می‌شود.

گزاره ۱. برای هر عدد صحیح $k \geq 2$، نامساوی زیر برقرار است:

$$\gamma(G) \leq \gamma_k^a(G) \leq \gamma_{k-1}^a(G).$$

گزاره ۲. برای هر مسیر P_n و هر دور C_n و $k \geq 1$، تساوی زیر برقرار است:

$$\gamma_k^a(C_n) = \gamma_k^a(P_n) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil.$$

اثبات. گراف C_n را در نظر بگیرید. از آنجایی که گزاره ۱ به ازای هر $k \geq 2$ برقرار است، پس نامساوی زیر حاصل می‌شود:

$$\gamma(C_n) \leq \gamma_k^a(C_n) \leq \gamma_{k-1}^a(C_n) \leq \gamma_{k-2}^a(C_n) \leq \cdots \leq \gamma_2^a(C_n) \leq \gamma_1^a(C_n).$$

بر طبق تعریف، تساوی $\gamma_1^a(C_n) = \gamma_0(C_n)$ برقرار است و از طرفی در مرجع [۴] ثابت شده است که،

$$\gamma_0(C_n) = \gamma(C_n) = \gamma_0(P_n) = \gamma(P_n) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil.$$

بنابراین،

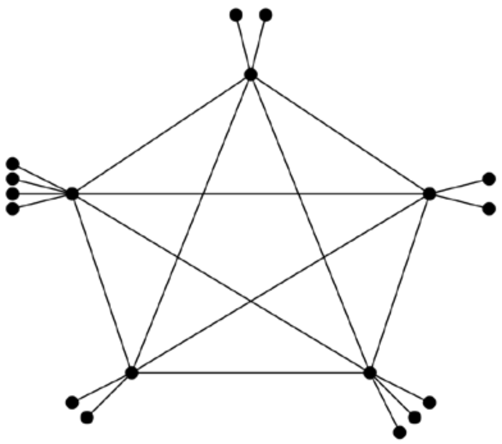
$$\gamma(C_n) \leq \gamma_k^a(C_n) \leq \gamma_{k-1}^a(C_n) \leq \gamma_{k-2}^a(C_n) \leq \cdots \leq \gamma_2^a(C_n) \leq \gamma_1^a(C_n) = \gamma_0(C_n) = \gamma(C_n).$$

بنابراین، به ازای هر $k \geq 1$ نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$\gamma_k^a(C_n) = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil.$$

دقیقاً به‌طور مشابه، نتیجه بالا برای مسیر P_n حاصل می‌شود. در نتیجه حکم برقرار است. □

در ادامه، رده $\mathcal{F}$ از گراف‌ها را ارائه می‌شود که عدد احاطه آن‌ها با عدد احاطه k- مجاورت برابر نیست. فرض کنید K_n که $n > 1$ گرافی کامل باشد. در ادامه بیان می‌شود که چگونه با کمک گراف K_n، گرافی ساخته و به $\mathcal{F}$ اضافه شود. به ازای هر رأس u در K_n حداقل دو رأس جدید اضافه می‌شود و u به آن‌ها متصل می‌شود. فرض کنید که گراف حاصل G باشد. حال، G به $\mathcal{F}$ اضافه می‌شود. شکل (۱) مثالی از گراف ساخته شده G است. لازم به ذکر است که درجه همه رئوس جدید دقیقاً یک است.



شکل (۱): گرافی عضو $\mathcal{F}$.

حال گراف G را در نظر بگیرید. فرض کنید که S احاطه‌گر کمینه G باشد. از آنجایی که هر رأس G با درجه حداقل ۲ مجاور به حداقل دو رأس درجه یک است، بنابراین بایستی S شامل تمام رئوس گراف K_n باشد. بنابراین، عدد احاطه گراف G برابر با تعداد رئوس گراف K_n یعنی n است. به راحتی دیده می‌شود که S تنها احاطه‌گر کمینه G است. حال، چون درجه هر رأس $G[S]$ برابر با $n-1$ است، پس به ازای هر عدد k با شرط $k < n$، S یک احاطه‌گر k- مجاورت نیست. بنابراین نتیجه می‌شود که $\gamma(G) \neq \gamma_k^a(G)$.

برای یک گراف دلخواه G و عدد صحیح $k \geq 1$، مجموعه D یک مجموعه k- *مستقل* نامیده می‌شود، هرگاه بیشترین درجه رئوس زیرگراف القائی $G[D]$ برابر $k-1$ باشد. یک مجموعه D یک مجموعه k- *مستقل ماکسیمال* نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر رأس $x \in V$ مجموعه $D \cup \{x\}$، یک مجموعه k- مستقل نباشد. کمترین تعداد عناصر یک مجموعه k-مستقل ماکسیمال عدد k-استقلال کمینه گراف G نامیده می‌شود و با نماد $i_k(G)$ نمایش داده می‌شود. حال، نتیجه زیر حاصل می‌شود.

گزاره ۳. برای هر گراف G، نامساوی زیر برقرار است:

$$\gamma_k^a(G) \leq i_k(G).$$

اثبات. فرض کنید که S یک مجموعه k-مستقل ماکسیمال باشد. ثابت می‌شود که S یک مجموعه احاطه‌گر k-مجاورت است. از آنجایی که S ماکسیمال است، هر رأس در $V-S$ مجاور به یک رأس در S است. بنابراین، S یک مجموعه احاطه‌گر است. از آنجایی که S یک مجموعه k-مستقل است، بنابراین زیرگراف القائی $G[S]$ حتما دارای رأسی از درجه $k-1$ است. این ثابت می‌کند که S یک مجموعه احاطه‌گر k-مجاورت است و در نتیجه $\gamma_k^a(G) \leq i_k(G)$. □

نتیجه زیر در مقاله [۵] بیان شده است.

گزاره ۴. اگر $\gamma_0(G) \neq \gamma(G)$، بنابراین به ازای هر $\gamma(G)$-مجموعه S و هر رأس $x \in S$، $|epn(x,S)| \geq 2$.

حال، اگر $\gamma_k^a(G) \neq \gamma(G)$، با توجه به گزاره ۱، نامساوی $\gamma(G) \neq \gamma_0(G)$ حاصل می‌شود و بنابراین طبق گزاره ۴، گزاره زیر حاصل می‌شود.

گزاره ۵. برای هر عدد صحیح $k \geq 1$، اگر $\gamma_k^a(G) \neq \gamma(G)$، آنگاه برای هر $\gamma(G)$-مجموعه S و هر رأس $x \in S$، $|epn(x,S)| \geq 2$.

حال، نتیجه زیر حاصل می‌شود.

نتیجه ۱. برای هر گراف G و عدد صحیح $k \geq 1$، اگر $\Delta(G) \leq k+1$، بنابراین $\gamma_k^a(G) = \gamma(G)$.

اثبات: فرض کنید (فرض خلف) که گرافی مانند G با شرط $\Delta(G) \leq k+1$ وجود دارد به طوری که $\gamma_k^a(G) \neq \gamma(G)$. فرض کنید که S یک $\gamma(G)$-مجموعه باشد. بر طبق گزاره ۵، به ازای هر رأس $x \in S$، $|epn(x,S)| \geq 2$. از طرفی دیگر از آنجایی که $\gamma_k^a(G) \neq \gamma(G)$، کمترین درجه گراف القائی $G[S]$ حداقل k می‌باشد. از اینرو، درجه هر رأس از S حداقل $k+2$ است که این با شرط $\Delta(G) \leq k+1$ در تناقض است. بنابراین، فرض خلف باطل و حکم ثابت است. □

یکی از نتایج جالب و راحتی که از نتیجه ۱ استخراج می‌شود، نتیجه زیر است.

نتیجه ۲. برای هر گراف r-منظم G و هر عدد صحیح $k \geq r-1$، $\gamma_k^a(G) = \gamma(G)$.

حال، مشابه اثبات گزاره ۵ گزاره زیر نیز اثبات می‌شود.

گزاره ۶. برای هر عدد صحیح $k \geq 1$، اگر $\gamma_k^a(G) \neq \gamma_{k+1}^a(G)$، آنگاه برای هر $\gamma_{k+1}^a(G)$- مجموعه S و هر رأس $x \in S$، $|epn(x,S)| \geq 2$.

حال، یک کران بالا برای $\gamma_k^a(G)$ با کمک $\gamma_{k+1}^a(G)$ حاصل می‌شود.

گزاره ۷. برای هر گراف G و عدد صحیح $k \geq 1$ که $\Delta(G) \geq k+1$، نامساوی زیر برقرار است:

$$\gamma_k^a(G) \leq \gamma_{k+1}^a(G) + \Delta(G) - (k+1).$$

اثبات. واضح است که اگر $\gamma_k^a(G) = \gamma_{k+1}^a(G)$ حکم ثابت می‌شود. پس فرض می‌شود که $\gamma_k^a(G) \neq \gamma_{k+1}^a(G)$. فرض می‌شود که S یک $\gamma_{k+1}^a(G)$-مجموعه باشد. چون $\gamma_k^a(G) \neq \gamma_{k+1}^a(G)$، پس درجه هر رأس $G[S]$ حداقل k است. طبق گزاره ۶، به ازای هر رأس $u \in S$ ، نامساوی $|epn(u,S)| \geq 2$ برقرار است. از طرفی دیگر، از آنجایی که درجه u در $G[S]$ حداقل k است، نامساوی $|epn(u,S)| \leq \Delta(G) - k$ برقرار است. حال، مجموعه $(S-\{u\}) \cup S'$ یک مجموعه احاطه‌گر k-مجاورت برای G است که در اینجا S' یک مجموعه احاطه‌گر k-مجاورت برای $G[epn(u,S)]$ است. از اینرو،

$$\begin{aligned}\gamma_k^a(G) &\leq |(S-\{u\}) \cup S'| \leq \gamma_{k+1}^a(G) - 1 + |epn(u,S)| \\ &\leq \gamma_{k+1}^a(G) + \Delta(G) - (k+1).\end{aligned}$$

بنابراین، حکم ثابت است. □

مشابه اثبات گزاره ۷، نتیجه زیر حاصل می‌شود.

گزاره ۸. برای هر گراف G، نامساوی زیر برقرار است:

$$\gamma_0(G) \leq \gamma(G) + \Delta(G) - 2.$$

بر اساس گزاره ۱ و گزاره ۸، به راحتی نتیجه زیر حاصل می‌شود.

نتیجه ۳. برای هر گراف G و عدد صحیح $k \geq 1$، نامساوی زیر برقرار می‌باشد:

$$\gamma_k^a(G) \leq \gamma(G) + \Delta(G) - 2.$$

حال، قضیه زیر ثابت می‌شود.

قضیه ۱. اگر G گرافی همبند با n رأس باشد و $\gamma_0(G) \neq \gamma(G)$، بنابراین

$$\gamma_0(G) \le \frac{n(\gamma(G)+1)}{3\gamma(G)}.$$

اثبات. فرض می‌شود که S یک $\gamma(G)$-مجموعه باشد. از آنجایی که $\gamma_0(G) \neq \gamma(G)$، طبق گزاره ۵، به ازای هر رأس $x \in S$، $|epn[x,S]| \ge 2$. حال، فرض می‌شود که $u \in S$ رأسی باشد که $|epn[u,S]|$ کمترین باشد. فرض می‌شود که $r = |epn[u,S]|$. واضح است که، مجموعه $(S-\{u\}) \cup S'$ یک مجموعه احاطه‌گر مجاورت برای G است که در اینجا S' یک $\gamma_0(G[epn[u,S]])$-مجموعه است. از اینرو، $\gamma_0(G) \le \gamma(G) + r - 1$. از طرفی دیگر، $\gamma(G) + r\gamma(G) \le n$. از آنجایی که $r \ge 2$ و $\gamma(G) \ge 2$، بنابراین،

$$2(\gamma(G)-2) \le r(\gamma(G)-2)$$
$$\Rightarrow 2\gamma(G) - 4 \le r\gamma(G) - 2r$$
$$\Rightarrow 3\gamma(G) + 3r - 3 \le \gamma(G)r + \gamma(G) + r + 1$$
$$\Rightarrow \gamma(G) + r - 1 \le \frac{(\gamma(G)+1)(r+1)}{3}$$
$$\Rightarrow \gamma(G) + r - 1 \le \frac{\gamma(G)(\gamma(G)+1)(r+1)}{3\gamma(G)}$$
$$\Rightarrow \gamma(G) + r - 1 \le \frac{\gamma(G)+\gamma(G)r}{3\gamma(G)/(\gamma(G)+1)}$$

بر اساس نامساوی‌های فوق نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$\gamma_0(G) \le \gamma(G) + r - 1 \le \frac{\gamma(G)+\gamma(G)r}{\frac{3\gamma(G)}{\gamma(G)+1}} \le \frac{n(\gamma(G)+1)}{3\gamma(G)}.$$

بنابراین، حکم ثابت است.□

مشابه اثبات قضیه ۱، قضیه زیر نیز اثبات می‌شود.

قضیه ۲. اگر G گرافی همبند با n رأس باشد و $\gamma_k^a(G) \neq \gamma_{k+1}^a(G)$، بنابراین

$$\gamma_k^a(G) \le \frac{n(\gamma_{k+1}^a(G)+1)}{3\gamma_{k+1}^a(G)}.$$

۳- الگوریتم و پیچیدگی

در این بخش، یک الگوریتم برای محاسبه کوچکترین مجموعه احاطه‌گر k-مجاورت برای یک گراف داده شده ارائه می‌شود. سپس، با کمک آن نشان داده می‌شود که عدد احاطه k-مجاورت یک درخت می‌تواند در زمان چندجمله‌ای محاسبه شود. همچنین ثابت می‌شود که مسئله تصمیم‌گیری مرتبط با احاطه‌گر k-مجاورت برای گراف‌های دوبخشی NP-کامل است.

۳-۱- الگوریتم

فرض می‌شود که G یک گراف با مجموعه رئوس V باشد. برای هر رأس $u \in V$ و هر عدد صحیح $k \ge 1$، فرض می‌شود که $P_k(u)$ مجموعه همه زیر مجموعه‌های حداکثر $k-1$ عضوی از مجموعه $N(u)$ باشد. حال، الگوریتم ۱ را در نظر بگیرید. این الگوریتم کوچکترین مجموعه احاطه‌گر k- مجاورت برای یک گراف داده شده را پیدا می‌کند.

حال، قضیه زیر ثابت می‌شود.

```
Algorithm 1: GAMMAKIS(G,k)
    Input: A graph G with vertex set V and an
           integer k ≥ 1.
    Output: Minimum k-adjacency dominating
            set of G.
c = |V|;
S = ∅;
foreach u ∈ V do
    x := u;
    foreach W ∈ P_k(u) do
        G' := G − (N[u] − W);
        if γ(G') < c then
            c = γ(G');
            S = γ(G')-set;
        end
    end
end
return S ∪ {x};
```

شکل (۲): توضیح مختصر

قضیه ۳. برای هر گراف $G=(V,E)$ و هر عدد صحیح $k \ge 1$، الگوریتم ۱ مجموعه احاطه‌گر k-مجاورت G با کمترین تعداد عضو را پیدا می‌کند.

اثبات. به راحتی پی برده می‌شود که مجموعه $S \cup \{x\}$ تولید شده توسط الگوریتم، یک مجموعه احاطه‌گر k- مجاورت است. حال، نشان داده می‌شود که $S \cup \{x\}$ یک مجموعه با کمترین تعداد عضو می‌باشد. فرض می‌شود (فرض خلف) که $S \cup \{x\}$ چنین مجموعه‌ای نباشد. از اینرو، حتما یک مجموعه احاطه‌گر k- مجاورت D برای گراف G وجود دارد به طوری که $|D| < |S \cup \{x\}|$. مجموعه D را به این شکل می‌شود فرض کرد که به ازای یک مجموعه S'، $D = S' \cup \{y\}$ که درجه y در $G[D]$ حداکثر $k-1$ است. به وضوح، نامساوی $|S'| < |S|$ برقرار است. فرض می‌شود که W^* مجموعه همه همسایگان y در S' باشد. بنابراین، $W^* \in P_k(y)$. از آنجایی که $S' \cup \{y\}$ یک مجموعه احاطه‌گر k-مجاورت برای G است، پس به راحتی این نتیجه حاصل می‌شود که S' یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف $G^* := G - (N[y] - W^*)$ است. در نتیجه، $\gamma(G^*) \le |S'|$. از طرفی دیگر، از آنجایی که $S \cup \{x\}$ خروجی الگوریتم است، بنابراین، به ازای هر $u \in V$ و هر $W \in P_k(u)$، نامساوی زیر حاصل می‌شود.

$$|S| \le \gamma\big(G-(N[u]-W)\big).$$

از نامساوی بالا، این نتیجه حاصل می‌شود که $|S| \le \gamma(G^*)$. از آنجایی که $\gamma(G^*) \le |S'|$، بنابراین $|S'| \le |S|$. اما این با $|S'| < |S|$ در تناقض است. از اینرو، $S \cup \{x\}$ یک مجموعه احاطه‌گر k-مجاورت با حداقل تعداد عضو برای G است.□

در ادامه، جهت بیان کاربردی از الگوریتم ۱، عدد احاطه k- مجاورت گراف‌های دوبخشی کامل $K_{m,n}$ محاسبه می‌شود.

گزاره ۹. برای هر عدد صحیح $k \ge 1$ و هر گراف دو بخشی کامل $K_{m,n}$،

$$\gamma_k^a(K_{m,n}) = \begin{cases} \min(m,n) & k=1 \\ 2 & k>1 \end{cases}.$$

اثبات. جهت سهولت در بیان اثبات، فرض می‌شود که $G = K_{m,n}$. فرض کنید که $U \cup V$ مجموعه رئوس G باشد که $U \cap V = \emptyset$ و $|U| = m$ و $|V| = n$. بدون از دست دادن کلیت، فرض می‌شود که $m \le n$. ابتدا حالت $k=$۱ اثبات می‌شود. فرض کنید که u اولین رأس در U باشد که توسط الگوریتم ۱ در نظر گرفته می‌شود. به وضوح، $P_k(u) = \emptyset$ و بنابراین عدد احاطه گراف $G-(N[u]-W)$ در خط ۶ الگوریتم برابر است با $m-1$. از آنجایی که $m \le n$، بنابراین الگوریتم مجموعه U را بر می‌گرداند. از اینرو، $\gamma_k^a(K_{m,n}) = |U| = m$. حال فرض می‌شود که $k > 1$. واضح است که G با کمتر از یک رأس نمی‌تواند احاطه شود. فرض کنید که a و b به ترتیب رئوسی دلخواه متعلق به U و V باشند. فرض می‌شود که S مجموعه‌ای باشد به صورت $S = \{a,b\}$ به وضوح S یک احاطه‌گر کمینه برای G است. حال، از آنجایی که درجه هر رأس گراف القائی $G[S]$ یک است. بنابراین چون فرض شده است که $k > 1$، پس طبق تعریف، S یک احاطه‌گر k-مجاورت کمینه نیز هست و بنابراین نتیجه می‌شود که $\gamma_k^a(K_{m,n}) = 2$. پس حکم ثابت است. □

۳-۲- پیچیدگی

دو مسئله تصمیم‌گیری بصورت زیر تعریف می‌شود.

مسئله مجموعه احاطه‌گر (DS):

نمونه: یک گراف $G = (V,E)$ و یک عدد صحیح ℓ.

سوال: آیا گراف G یک مجموعه احاطه‌گر با اندازه حداکثر ℓ دارد؟

مسئله مجموعه احاطه‌گر k- مجاورت (kADS):

نمونه: یک گراف $G = (V,E)$ و یک عدد صحیح ℓ.

سوال: آیا گراف G یک مجموعه احاطه‌گر k-مجاورت با اندازه حداکثر ℓ دارد؟

در ادامه راجع به زمان اجرای الگوریتم ۱ صحبت می‌شود. به راحتی می‌شود دریافت که خطوط ۳-۶ الگوریتم ۱ می‌توانند در زمان چندجمله‌ای اجرا شوند. خطوط ۷- ۹ از عدد احاطه گراف $G' = G-(N[u]-W)$ استفاده می‌کنند. بنابراین زمان اجرای الگوریتم ۱ به زمان محاسبه $\gamma(G')$ بستگی دارد. اگر امکان این وجود داشته باشد که $\gamma(G')$ در زمان چندجمله‌ای محاسبه شود، بنابراین زمان اجرای الگوریتم ۱ نیز چندجمله‌ای است، و در نتیجه $\gamma_k^a(G)$ در زمان چندجمله‌ای محاسبه می‌شود. حال نتیجه زیر با استفاده از مقاله کوکین و همکارانش [۷] حاصل می‌شود.

قضیه ۴. عدد احاطه k-مجاورت هر درخت می‌تواند در زمان چندجمله‌ای محاسبه شود.

اثبات. فرض می‌شود که T درختی دلخواه است و T و عدد k به الگوریتم ۱ به عنوان ورودی داده شده است. همانگونه که قبلاً اشاره شد، زمان اجرای الگوریتم ۱ به زمان محاسبه عدد احاطه $T' = T-(N[u]-W)$ بستگی دارد. در مرجع [۷] نشان داده شده است که عدد احاطه هر درختی در زمان خطی می‌تواند محاسبه شود. از آنجایی که T' درخت یا جنگل است، بنابراین به راحتی می‌توان دریافت که عدد احاطه T' نیز می‌تواند در زمان خطی محاسبه شود و در نتیجه زمان اجرای الگوریتم ۱ چندجمله‌ای است. لازم به ذکر است که خطوط ۳-۶ الگوریتم می‌توانند در زمان چندجمله‌ای محاسبه شوند. □

حال، نشان داده می‌شود که مسئله تصمیم‌گیری ***kADS*** برای گراف‌های دوبخشی NP-کامل است. در مرجع [۵] نشان داده شده است که مسئله تصمیم‌گیری عدد احاطه مجزا برای گراف‌های دوبخشی NP-کامل است. با بررسی اثبات ارائه شده در [۵] می‌شود پی برد که با اعمال تغییرات ناچیز در آن اثبات، ***kADS*** برای گراف‌های دوبخشی نیز NP-کامل است. از آنجایی که در اثبات لازم است که مسئله معروف ***3-SAT*** به ***kADS*** کاهش داده شود، بنابراین ابتدا مسئله ***3-SAT*** معرفی می‌شود. در اینجا از برخی واژگان و اصطلاحات به کار رفته در [۵] استفاده می‌شود. فرض می‌شود که U مجموعه‌ای از متغیرهای بولی است. نگاشت $f: U \to \{T,F\}$ را که T و F به ترتیب نماد درست و نادرست هستند را در نظر بگیرید. فرض کنید $u \in U$ اگر $f(u) = T$ آنگاه گفته می‌شود که u درست است و اگر $f(u) = F$ آنگاه گفته می‌شود که u نادرست است. یک فرمول بولی که روی مجموعه U تعریف شده باشد را در نظر بگیرید. یک متغیر $u \in U$ می‌تواند به دو شکل u و $\bar{u}$ در این فرمول ظاهر شود. به هر یک از u و $\bar{u}$ یک حرف گفته می‌شود. اگر $f(u) =$

T، آنگاه حرف u درست است و اگر $f(u)=F$، آنگاه حرف $\bar{u}$ درست است. به مجموعه‌ای از حرف‌ها روی U یک بند روی U گفته می‌شود. فرض کنید که C بندی روی U باشد. اگر حداقل یکی از حرف‌های بند C با توجه به نگاشت f ارزش درست داشته باشد، آنگاه C درست است و در غیر این‌صورت C نادرست است. حال، مسئله ***3-SAT*** به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

3-SAT:

نمونه: یک گردایه $\mathcal{C}=\{C_1,\dots,C_m\}$ از بندها روی مجموعه U به طوری که برای هر بند $C_i\in\mathcal{C}$، $|C_i|=3$.

سوال: آیا $\mathcal{C}$ صدق‌پذیر است یا به‌عبارتی دیگر نگاشت $f:U\to\{T,F\}$ وجود دارد به‌طوری که با توجه به آن هر $C_i\in\mathcal{C}$ درست باشد.

در کتاب [۸] ثابت شده است که مسئله ***3-SAT*** یک مسئله NP-کامل است. حال، قضیه زیر ثابت می‌شود.

قضیه ۵. مسئله تصمیم‌گیری ***kADS*** برای گراف‌های دوبخشی NP-کامل است.

اثبات. اولاً به راحتی می‌شود پی برد که مسئله ***kADS*** متعلق به کلاس NP است. حال، NP-سخت بودن آن نشان داده می‌شود. بدین منظور، مسئله ***3-SAT*** به مسئله ***kADS*** کاهش داده می‌شود. فرض می‌شود که $U=\{u_1,\dots,u_\ell\}$ و $\mathcal{C}=\{C_1,\dots,C_m\}$ نمونه‌ای برای مسئله ***3-SAT*** است. با استفاده از U و $\mathcal{C}$ یک گراف دوبخشی G طوری ساخته می‌شود که C صدق‌پذیر باشد اگر و فقط اگر $\gamma_k^a(G)\le 2\ell$. گراف G به صورت زیر ساخته می‌شود. به ازای هر $u_i\in U$، فرض می‌شود که H_i دوری به طول ۶ با رئوس $u_iv_i\bar{u}_id_ib_ia_i$ باشد (ترتیب رئوس به همین شکلی که نوشته شده است، می‌باشد). به ازای هر $C_j\in\mathcal{C}$، رأس جدید c_j به گرافی که تاکنون ساخته شده، اضافه می‌شود. سپس، اگر $C_j=\{x_j,y_j,z_j\}$، آنگاه یال‌های (c_j,x_j)، (c_j,y_j) و (c_j,z_j) به مجموعه یال‌ها اضافه می‌شود. با توجه به اینکه هیچ یالی بین هر دو رأس c_j وجود ندارد، بنابراین به راحتی می‌شود پی برد که گراف G دوری به طول فرد ندارد و در نتیجه G دوبخشی است.

حال، نشان داده می‌شود که $\mathcal{C}$ صدق‌پذیر است اگر و فقط اگر $\gamma_k^a(G)\le 2\ell$. ابتدا فرض می‌شود که $\mathcal{C}$ صدق‌پذیر است. بنابراین یک نگاشت $f:U\to\{T,F\}$ وجود دارد به طوری که با توجه به آن هر $C_j\in\mathcal{C}$ درست باشد. فرض کنید که S زیرمجموعه‌ای از رئوس G باشد که به صورت زیر ساخته می‌شود. به ازای هر $u_i\in U$، اگر $f(u_i)=T$، آنگاه رئوس u_i و d_i به S اضافه می‌شود و اگر $f(u_i)=F$، آنگاه رئوس $\bar{u}_i$ و a_i به S اضافه می‌شود. حال، نشان داده می‌شود که S یک مجموعه احاطه‌گر k- مجاورت برای G با اندازه 2ℓ است. از آنجایی که $\ell=|U|$، بنابراین $|S|=2\ell$. حال، برای هر i که $i\in\{1,\dots,\ell\}$، از آنجایی که $\{u_i,d_i\}\subseteq S$ یا $\{\bar{u}_i,a_i\}\subseteq S$، بنابراین تمام رئوس H_i توسط S احاطه می‌شوند. حال، فرض کنید که c_j رأسی دلخواه و متناظر با بند $C_j\in\mathcal{C}$ باشد. از آنجایی که $\mathcal{C}$ صدق‌پذیر است، بنابراین حداقل یکی از حرف‌های متعلق به C_j ارزش درست دارد. بدون از دست دادن کلیت، فرض می‌شود که u_j چنین حرفی باشد. طبق تعریف (c_j,u_j) یالی در G است و همچنین $\{u_j,d_j\}\subseteq S$. بنابراین، c_j توسط u_j احاطه می‌شود. بنابراین، توضیحات بالا نشان می‌دهند که S یک احاطه‌گر برای G است. واضح است که S یک مجموعه مستقل است. بنابراین، درجه هر رأس در $G[S]$ صفر است، و درنتیجه، S یک احاطه‌گر k- مجاورت نیز هست و بنابراین $\gamma_k^a(G)\le 2\ell$.

حال، نشان داده می‌شود که اگر $\gamma_k^a(G)\le 2\ell$ آنگاه $\mathcal{C}$ صدق‌پذیر است. فرض می‌شود که S یک مجموعه احاطه‌گر k- مجاورت کمینه برای گراف G باشد به طوری که $|S|\le 2\ell$. واضح است که به ازای هر i و $i\in\{1,\dots,\ell\}$، جهت احاطه شدن رأس‌های H_i، بایستی $|S\cap V(H_i)|\ge 2$ که در اینجا $V(H_i)$ مجموعه رئوس H_i است. از طرفی دیگر، چون $|S|\le 2\ell$، بنابراین $|S\cap V(H_i)|=2$ و $|S\cap\{c_1,\dots,c_m\}|=\emptyset$. حال، رئوس u_i و $\bar{u}_i$ در H_i در نظر گرفته می‌شود. ادعا می‌شود که می‌توان فرض کرد که $|\mathrm{S}\cap\{\mathrm{u_i},\bar{\mathrm{u}}_\mathrm{i}\}|=1$. حال، این ادعا اثبات می‌شود. اولاً از آنجایی که $|S\cap V(H_i)|=2$، بنابراین $|\mathrm{S}\cap\{\mathrm{u_i},\bar{\mathrm{u}}_\mathrm{i}\}|\le 2$. اگر $|\mathrm{S}\cap\{\mathrm{u_i},\bar{\mathrm{u}}_\mathrm{i}\}|=2$، بنابراین b_i نمی‌تواند توسط S احاطه شود که این یک تناقض است پس بایستی $|\mathrm{S}\cap\{\mathrm{u_i},\bar{\mathrm{u}}_\mathrm{i}\}|\le 1$. اگر $|\mathrm{S}\cap\{\mathrm{u_i},\bar{\mathrm{u}}_\mathrm{i}\}|=0$، بنابراین به وضوح $\{b_i,v_i\}\subseteq S$ که در این‌صورت $\{b,v_i\}$ با $\{u_i,d_i\}$ جایگزین می‌شود. با این توضیحات، ادعا ثابت می‌شود. حال نگاشت $f:U\to\{F,T\}$ به صورت زیر تعریف می‌شود. برای هر $u_i\in U$، اگر $u_i\in S$، بنابراین $f(u_i)=T$ و اگر $\bar{u}_i\in S$ آنگاه $f(u_i)=F$. حال نشان داده می‌شود که $\mathcal{C}$ تحت f صدق‌پذیر است. فرض کنید که C_j عضوی دلخواه در $\mathcal{C}$ باشد. حال رأس c_j که متناظر با C_j است در نظر گرفته می‌شود. چون S احاطه‌گر است، پس حتماً یک عدد صحیح i که $i\in\{1,\dots,\ell\}$ وجود دارد به طوری که c_j توسط رأسی در H_i احاطه شود. اگر c_j توسط u_i احاطه شود، پس $f(u_i)=T$ و در نتیجه بند C_j درست است و اگر c_j توسط $\bar{u}_i$ احاطه شود، پس $f(\bar{u}_i)=F$ و در نتیجه $\bar{u}_i$ ارزش درست دارد. بنابراین C_j ارزش درست دارد و درنتیجه C صدق پذیر است. بنابراین، حکم ثابت است. □

۴- نتیجه گیری

در این مقاله، نوع جدیدی از احاطه‌گرها با عنوان احاطه‌گر k- مجاورت ارائه شد و سپس تعدادی کران و مقادیر دقیق عدد

احاطه k- مجاورت برخی از گراف‌ها ارائه شد. همچنین، یک الگوریتم برای محاسبه عدد احاطه k- مجاورت گراف‌ها ارائه شد و سپس با کمک آن نشان داده شد که عدد احاطه k- مجاورت یک درخت می‌تواند در زمان چندجمله‌ای محاسبه شود. همچنین ثابت شد که مسئله تصمیم‌گیری مرتبط با احاطه‌گر k- مجاورت برای گراف‌های دوبخشی NP- کامل است.

۵- مراجع

[1]. T. W. Haynes, S. Hedetniemi, and P. Slater, “Fundamentals of dominationin graphs,” CRC Press, 1998.

[2]. M. Rajaati Bavil Olyaei and M. R. Hooshmandasl, “Generating Tree Decomposition of Graphs with Imperialist Competitive Algorithm for Use in Secret Sharing Scheme,” Jourrnal of Electronical & Cyber Defence, vol. 7, no. 3, pp. 105-111, 2019. (In Persian).

[3]. N. Biggs, “Perfect codes in graphs,” J. Comb. Theory. B., vol. 15, no. 3, pp. 289-296, 1973.

[4]. S. Hamid and S. Balamurugan, “Isolate domination in graphs,” Arab Journal of Mathematical Sciences, vol. 22, no. 2, pp. 232-241, 2016.

[5]. N. J. Rad, “Some notes on the isolate domination in graphs,” AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics, vol. 14, no. 2, pp. 112-117, 2017.

[6]. G. Rajasekar and A. Jeslet Kani Bala, “k-Isolate domination number of simple graphs,” Malaya Journal of Matematik, vol. S, no. 1, pp. 113-115, 2019.

[7]. E. Cockayne, S. Goodman, S. Hedetniemi, “A linear algorithm for the domination number of a tree,” Inform. Process. Lett., vol. 4, no. 2, pp. 41-44, 1975.

[8]. M. R. Garey and D. S. Johnson, “Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness,” Freeman, San Francisco, 1979.