

---

## On Improvement of Cardinalized Probability Hypothesis Density Filter Implementation by using Auxiliary Particle Filter

M. R. Danaee\*

\*Imam Hossein University

(Received: 27/04/2015, Accepted: 12/01/2016)

### ABSTRACT

*The PHD filter recursion is introduced to enable the implementation of expensive computational algorithms of multitarget Bayesian filtering. The goal of this recursion is to update and propagate the posterior intensity of a Random Finite Set during time steps. To that end, Cardinalized PHD is introduced as an extension of PHD filter to overcome the PHD's weakness in estimating the number of targets. In the CPHD filter, the posterior intensity function and the cardinality distribution are updating at the same time. In this paper, we use auxiliary particle filter to implement the CPHD filter. The benefit of the proposed algorithm is to sample at the higher dimensional space compared to the dimensional of the target space in order to generate approximating samples of the CPHD filter and this will improve the estimation accuracy. To that end, we first reformulize the CPHD recursion in a way which is suitable for auxiliary particle filter. Then, to sample in a higher dimensional space, we first use an auxiliary variable which is the index of previously generated samples and then we apply another auxiliary variable which is the index of current measurements to improve the estimation of the number and position of multiple targets. Comparison between mean and variance of estimated cardinality and error of multitarget position estimation obtained from simulation results indicate the superiority of our proposed algorithm compared to the current implementation method of the CPHD filter by using SIR particle filter.*

**Keywords:** Multitarget tracking, Random Finite Set, Probability hypothesis density filter, Cardinalized PHD, Auxiliary particle filter

## بهبود اجرای فیلتر چگالی فرض احتمال کاردینالی توسط فیلتر ذره‌ای با متغیر کمکی

میثم رئیس دانایی\*

استادیار، دانشگاه جامع امام حسین(ع)

(دریافت: ۹۴/۲۷، پذیرش: ۹۴/۱۰/۲۲)

### چکیده

معادلات چگالی فرض احتمال (PHD) برای قابل پیاده‌سازی نمودن محاسبات سنگین و غیرقابل اجرای فیلترینگ چندهدفه بیزین طراحی شده‌اند. هدف این معادلات به‌روزرسانی و انتشار تابع شدت پسین از مجموعه محدود تصادفی (RFS) اهداف در طول زمان می‌باشد. در همین راستا، فیلتر PHD کاردینالی (CPHD) به‌عنوان توسعه‌ای بر روابط فیلتر PHD ارائه گردیده است تا ضعف عدم دقت کافی در تخمین تعداد اهداف را برطرف نماید. در فیلتر CPHD تابع شدت پسین و توزیع کاردینالی پسین مشترکاً بروز می‌گردند. در این مقاله با استفاده از فیلتر ذره‌ای با متغیر کمکی، به پیاده‌سازی فیلتر CPHD خواهیم پرداخت. حسن پیاده‌سازی مطرح شده آن است که، در فضایی با ابعاد بالاتر از ابعاد فضای اهداف تحت بررسی کار خواهد شد تا نمونه‌های تقریب‌زنده فیلتر CPHD تولید شوند، که این امر به بهبود دقت تخمین فیلتر خواهد انجامید. به این منظور، در ابتدا معادلات بازگشتی فیلتر CPHD را به‌نحوی دوباره‌نویسی می‌کنیم که مناسب کار با فیلتر ذره‌ای با متغیر کمکی باشد. سپس، برای نمونه‌برداری در فضای با ابعاد بالاتر، ابتدا از متغیر کمکی برابر نمایه نمونه‌های از قبل تولید شده و سپس از متغیر کمکی نمایه مشاهدات جاری استفاده می‌کنیم تا بر دقت تخمین تعداد اهداف و تخمین موقعیت اهداف افزوده گردد. مقایسه شبیه‌سازی‌های عددی بر مبنای واریانس و میانگین تخمین کاردینالی و خطای تخمین موقعیت اهداف بیانگر بهبود عملکرد الگوریتم پیشنهادی ما نسبت به شیوه رایج پیاده‌سازی از الگوریتم CPHD توسط فیلتر ذره‌ای SIR می‌باشند.

**واژه‌های کلیدی:** ردگیری چندهدفه، مجموعه محدود تصادفی، فیلتر چگالی فرض احتمال، فیلتر چگالی فرض احتمال کاردینالی، فیلتر ذره‌ای با متغیر کمکی

### ۱- مقدمه

انتگرال‌های چندلایه<sup>۳</sup> ناشی از حالات اهداف است [۹]. این حالات با فضای با ابعاد بالا، پیاده‌سازی یک سیستم ردگیری را بسیار دشوار می‌نمایند. برای آسان‌سازی شرایط، گشتاور مرتبه اول<sup>۴</sup> عادلالت بازگشتی بیزین چندهدفه کامل<sup>۵</sup> به‌نام چگالی فرض احتمال<sup>۶</sup> (PHD) به‌دست می‌آید که چگالی شدت پسین را به‌جای چگالی پسین<sup>۷</sup> چندهدفه در طول زمان انتشار می‌دهد [۱۰].

به‌علت سهولت و حجم محاسباتی پایین فیلتر PHD برای حل مسئله MTT، تحقیقات زیادی در زمینه‌های کاربردی مختلف از جمله در ردگیری رادار دوپایه‌ای<sup>۸</sup> و یا در ردگیری پسیو<sup>۹</sup> [۱۱].

یک طراح سیستم ردگیری به‌هنگام ردگیری چندهدفه<sup>۱</sup> ناچار از تخمین هم‌زمان حالات اهداف نامعلوم و تعداد آن‌ها می‌باشد، با توجه به این‌که این تعداد با زمان متغیر است. آنچه بر مشکلات کارمی‌افزاید وجود ابهام در نحوه انتساب مشاهدات به اهداف، عدم آشکارسازی کامل اهداف و وجود هشدارهای کاذب می‌باشد [۳-۱]. در مراجع [۶-۴] ابزار بسیار مناسبی برای مواجهه با این مشکلات توسط نظریه آمارگان مجموعه محدود (FISST) ارائه شده است. نظریه آمارگان مجموعه محدود<sup>۲</sup>، زیرمجموعه‌ای از نظریه فرایند نقطه‌ای [۷] می‌باشد. در این نظریه، حل مسئله MTT با به‌کارگیری RFS به‌صورت سیستماتیک انجام خواهد پذیرفت.

مشکل اصلی به‌کارگیری FISST در زمینه MMT مواجهه با

\* رایانامه نویسنده پاسخگو: mraeesdanaee@ihu.ac.ir

- 1- Multi-Target Tracking (MTT)
- 2- Finite Set Statistics

- 3- Manifold integrals
- 4- First moment approximation
- 5- Full multitarget Bayes recursion
- 6- Probability hypothesis density (PHD)
- 7- Posterior intensity
- 8- Bistatic radar
- 9- Passive

معرفی تابع شدت زایش هدف<sup>۹</sup> و فقی برای بهبود پیاده‌سازی فیلترهای PHD و CPHD پرداخته‌اند. با این حال، راه‌کار تازه‌ای برای افزایش کارایی فیلترها برای نمونه‌برداری از اهداف از قبل موجود ارائه نشد. تلاش دیگر در [۲۷] انجام شده است که با الهام‌گرفتن از ایده فیلتر ذره‌ای کمکی<sup>۱۰</sup> (APF) که در [۲۸] ارائه شده بود، با به‌کارگیری متغیرهای کمکی در نمونه‌برداری مونت‌کارلو، عملکرد پیاده‌سازی فیلتر PHD را بهبود بخشید.

با وجود برتری کارایی فیلتر CPHD نسبت به فیلتر PHD، تلاش‌های مشابهی برای بهبود عملکرد فیلتر CPHD همانند آنچه برای بهبود عملکرد فیلتر PHD وجود داشته است، صورت نگرفته است. علت اصلی این امر این است که، روابط بازگشتی در فیلتر CPHD بسیار از روابط بازگشتی در فیلتر PHD پیچیده‌تر می‌باشند. در این مقاله، راه‌کار پیاده‌سازی فیلتر CPHD براساس APF ارائه می‌شود که بهبود قابل ملاحظه‌ای نسبت به پیاده‌سازی SMC موجود در مقالات فعلی به‌بار خواهد آورد. برای این منظور، ابتدا رهیافتی برای یک‌پارچه‌سازی تلاش‌های صورت‌گرفته در پیاده‌سازی‌های SMC برای فیلتر PHD ارائه خواهیم داد و نام آن را انتگرال‌گیری مونت‌کارلوی با متغیر کمکی (AVMCI) می‌نویسیم. سپس، معادلات بازگشتی فیلتر CPHD را از فرم اصلی آن که ابتدا در [۲۰] ارائه شده بود به‌صورتی بازنویسی خواهیم نمود که پیاده‌سازی نوینی که در ادامه در این مقاله ارائه خواهد گشت را تسهیل نماید و درنهایت، به معرفی پیاده‌سازی مبتنی بر APF از فیلتر CPHD خواهیم پرداخت و در سناریویی با تعداد اهداف نامعلوم و متغیر با زمان و مدل فضای حالت غیرخطی و برای محدوده متفاوتی از پارامترهای شبیه‌سازی مانند تعداد ذرات فیلتر ذره‌ای و واریانس نویز مشاهده، برتری نتایج به‌دست‌آمده از الگوریتم پیشنهادی را در مقایسه با نتایج الگوریتم رایج پیاده‌سازی SMC برای فیلتر CPHD نشان خواهیم داد.

ساختار این مقاله در ادامه ذکر می‌گردد. در بخش ۲ به معرفی RFS و معادلات بازگشتی فیلتر PHD می‌پردازیم و نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان رهیافت AVMCI را به‌عنوان ایده‌ای یک‌پارچه‌کننده برای انواع پیاده‌سازی‌های SMC از فیلتر PHD در نظر گرفت. بخش ۳ دربرگیرنده نوآوری اصلی مقاله است که ابتدا با فرمول‌بندی جدیدی از روابط بازگشتی فیلتر CPHD شروع می‌شود و با معرفی پیاده‌سازی فیلتر CPHD بر مبنای فیلتر APF توسط چگالی‌های اهمیتی متفاوت ادامه می‌یابد. در بخش ۴، نتایج عددی حاصل از چگالی‌های اهمیتی متفاوت ارائه می‌گردد. درنهایت در بخش ۵ نتیجه‌گیری صورت می‌پذیرد.

سونار<sup>۱</sup> [۱۲]، موقعیت یابی و نقشه برداری به‌صورت همزمان<sup>۲</sup> [۸]، ردگیری نقاط خصیصه در تصاویر پیاپی [۱۳]، ردگیری تصویر سونار [۱۴]، نظارت‌نمودن ترافیک [۱۵]، ردگیری خودروی متحرک [۱۶]، ردگیری سلول [۱۷]، و بینایی ماشینی [۱۸] صورت گرفته است.

معادلات بازگشتی فیلتر PHD برای سیستم‌های مارکف پرش خطی<sup>۳</sup> نیز تعمیم داده شده‌اند تا بتوانند در محیط‌هایی با اهداف مانوری، به‌خوبی عمل کنند [۱۹].

متأسفانه فیلتر PHD برای سهولت روابط، فرض بر پواسن<sup>۴</sup> بودن RFS های اهداف می‌نماید. در نتیجه این فرض، واریانس توزیع کاردینالی برابر با مقدار میانگین آن خواهد گشت. این امر بدین معنی است که هرگونه افزایشی در تعداد اهداف ردگیری منجر به کاهش دقت تخمین‌زده‌شده از تعداد اهداف مورد انتظار می‌گردد.

برای آن که اطلاعات گشتاورهای مرتبه بالاتر در معادلات بازگشتی فیلتر PHD به‌کار برده شود، پیشنهاد تعمیم فیلتر PHD به فیلتر CPHD در [۲۰ و ۲۱] ارائه شد. فیلتر PHD کاردینالی<sup>۵</sup> (CPHD) به‌طور جداگانه توزیع کاردینالی را همگام با چگالی شدت<sup>۶</sup> در طول زمان به‌روزرسانی می‌نماید.

به‌طور معمول دو رهیافت در پیاده‌سازی فیلترهای PHD و CPHD وجود دارد: ۱) روش‌های ترکیب گوسی<sup>۷</sup> (GM) که در [۲۲-۲۴] شرح داده شده‌اند. این رهیافت‌ها منجر به راه‌حلی به‌فرم تحلیلی و بسته برای به‌روزرسانی معادلات بازگشتی فیلترهای PHD و CPHD می‌گردند. به‌علاوه دارای قابلیت ذاتی برای استخراج حالات اهداف چندگانه از روی خروجی فیلترهای PHD و CPHD هستند. ۲) شیوه‌های مونت‌کارلوی ترتیبی<sup>۸</sup> SMC که در [۱۳، ۲۴ و ۲۵] توضیح داده شده‌اند که در اصل جواب‌گوی سناریو‌هایی هستند که رهیافت‌های GM به علت مدل‌های فضای حالت غیرگوسی و غیرخطی، کارایی خود را از دست می‌دهند. برخلاف رهیافت‌های GM، پیاده‌سازی‌های مبتنی بر SMC محدودیت‌های سختی بر معادلات بازگشتی فیلترهای PHD و PH قرار نمی‌دهند و در نتیجه دارای پتانسیل زیادی برای بهبود پیاده‌سازی می‌باشند. متأسفانه تعداد تلاش‌ها برای بهبود عملکرد این فیلترها بسیار محدود می‌باشد. برای ذکر چندی از این تلاش‌ها می‌توان به مرجع [۲۶] اشاره نمود که به

- 1- Sonar
- 2- Simultaneous Localization And Mapping (SLAM)
- 3- Linear Jump Markov Systems
- 4- Poisson
- 5- Cardinalized PHD
- 6- Intensity Density
- 7- Finite Gaussian Mixtures
- 8- Sequential Monte Carlo

9- Target birth intensity function  
10- The Auxiliary Particle Filter

مطابق با ادبیات APF،  $w_q^n$  وزن مرحله اول<sup>۱</sup> نامیده می‌شود و  $q_n(\mathbf{x})$  چگالی اهمیتی مشروط بر مولفه ترکیب  $n$  ام می‌باشد. مولفه ترکیب  $n$  ام را متغیر کمکی می‌نامند. در نهایت، تخمین (۲) به وسیله APF، به صورت میانگین نمونه‌ای زیر در می‌آید:

$$I_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{g'(n^i, \mathbf{x}^i)}{q(n^i, \mathbf{x}^i)} \quad (7)$$

از آنجا که محاسبه انتگرال (۱) به صورت مونت کارلو و با ایده متغیر کمکی در رابطه (۷) صورت می‌پذیرد، نام این روش را انتگرال گیری مونت کارلوی متغیر کمکی<sup>۲</sup> (AVMCI) می‌نویسیم. به عبارت دیگر، برای تولید هر نمونه  $\mathbf{x}^i$ ، ابتدا روی به تولید متغیر کمکی  $n^i$  مبتنی بر وزن‌های مرتبه اول می‌نماییم و سپس از مولفه‌ای از چگالی اهمیتی که متناظر با آن متغیر کمکی می‌باشد یعنی  $q(\mathbf{x} | n^i)$  نمونه برداری می‌کنیم. طراحی دقیق  $q(n^i, \mathbf{x}^i)$  منجر به خطای تخمین RMS<sup>۳</sup> کمتری خواهد گشت و تقریب نزدیک‌تری به دست خواهد داد.

در بخش ۲-۲، نشان خواهیم داد که چگونه ایده نهفته در AVMCI می‌تواند شیوه‌های بهبود یافته در پیاده‌سازی فیلتر PHD را به صورت یک پارچه در آورد.

## ۲-۱- مجموعه محدود تصادفی<sup>۴</sup> (RFS)

بر طبق نظریه FISST که خود فرمول‌بندی مناسبی از نظریه فرایند نقطه‌ای [۷] برای حل مسئله MTT می‌باشد، بردار حالت چندهدفه  $X$  یک RFS به نام  $\Xi$  بوده که نه تنها بردارهای حالت اهداف  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$  باید تخمین زده شوند، بلکه تعداد اهداف کلی  $n$  نیز باید در هر لحظه به دست آید. در نظریه FISST، انتگرال مجموعه بر روی تابع احتمال چندهدفه  $f_{\Xi}(X)$  به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\int f_{\Xi}(X) \delta X \cong f(\phi) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int f_{\Xi}(\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}) d\mathbf{x}_1 \dots d\mathbf{x}_n \quad (8)$$

که در آن،  $\emptyset$  یک مجموعه تهی و  $f(\emptyset)$  احتمال رخ دادن مجموعه تهی و  $n!$  برای حذف اثر طبیعی جایگشت‌ها در  $f_{\Xi}(\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\})$  می‌باشد. علت وجود داشتن این اثر آن است که، مشاهدات چندهدفه  $Z = \{\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_m\}$  یک مجموعه محدود را تشکیل می‌دهند که هیچ‌گونه ترتیبی در کنار هم ندارند.

## ۲- معرفی مجموعه محدود تصادفی و پیاده‌سازی

### فیلتر PHD توسط فیلتر ذره‌ای با متغیر کمکی

در این بخش در ابتدا نحوه محاسبه یک انتگرال چندلایه توسط شیوه مونت کارلو به صورت عددی را شرح می‌دهیم. فرض کنید که می‌خواهیم انتگرال زیر را حساب نماییم:

$$I = \int g(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (1)$$

جایی که  $\mathbf{x} \in R^{n_x}$ . شیوه‌های مونت کارلو از چگالی اهمیتی  $q(\mathbf{x})$  برای تولید نمونه‌ها استفاده می‌کنند که در آن‌ها  $x \subseteq \text{support}(q)$  با  $N \geq 1$  نمونه  $\{\mathbf{x}^i; i = 1, \dots, N\}$ ، که از روی تابع چگالی احتمال  $q(\mathbf{x})$  تولید شده‌اند، تخمین مونت کارلو (MC) از انتگرال (۱) که معادل رابطه زیر است:

$$I = \int \frac{g(\mathbf{x})}{q(\mathbf{x})} q(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (2)$$

به صورت میانگین نمونه‌ای زیر در می‌آید:

$$I_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{g(\mathbf{x}^i)}{q(\mathbf{x}^i)} \quad (3)$$

بر اساس قانون اعداد بزرگ،  $I_N$  به طور حتم به  $I$  همگرا خواهد گشت به شرط آن که نمونه‌های تولیدی  $\mathbf{x}^i$  از یک دیگر مستقل باشند و تعداد نمونه‌ها به اندازه کافی زیاد باشد و  $g(\mathbf{x})/q(\mathbf{x})$  دارای کران بالا باشد.

اکنون فرض نماییم که  $g(\mathbf{x})$  می‌تواند بر حسب ترکیب توابع وزن دار زیر بیان شود:

$$g(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^N w_n^n g_n(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^N g'(n, \mathbf{x}) \quad (4)$$

باتوجه به ترکیبی بودن  $g(\mathbf{x})$  می‌توان چگالی اهمیتی زیر را که خود ترکیبی از چگالی‌های اهمیتی گوناگونی است، برای محاسبه انتگرال‌های چندلایه که نمونه آن در رابطه (۱) نشان داده شده است، به کار گرفت:

$$q(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^N w_q^n q_n(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^N q(n, \mathbf{x}) \quad (5)$$

که در آن،  $w_q^n$  وزن مولفه ترکیب  $q_i(\mathbf{x})$  می‌باشد، به نحوی که:  $\sum_{n=1}^N w_q^n = 1$ . اگر رابطه را با ادبیات APF که با بهره‌گیری از ایده متغیر کمکی در فیلتر ذره‌ای اولین بار در [۲۸] مطرح شد، تطبیق دهیم، می‌توان هر  $q(n, \mathbf{x})$  را به صورت زیر نمایش داد:

$$q(n, \mathbf{x}) = w_q^n \overbrace{q_n(\mathbf{x})}^{q(\mathbf{x}|n)} \quad (6)$$

1- First-Stage Weight

2- Auxiliary Variable MC Integration

3- Root Mean Square

4- Random Finite Set

$$D_{k+1|k}(\mathbf{x}) = b(\mathbf{x}) + \int p_S(\mathbf{x}_k) f_{k+1|k}(\mathbf{x}|\mathbf{x}_k) D_{k|k}(\mathbf{x}_k) d\mathbf{x}_k \quad (12)$$

که بنابر فرض، اهداف به‌طور مستقل از هم در طول زمان حرکت می‌کنند و این حرکت بر مبنای چگالی تغییر<sup>۳</sup> Markov در فرم  $f_{k+1|k}(\mathbf{x}|\mathbf{x}_k)$  انجام می‌گردد.

در زمان  $k+1$ ، مشاهداتی جدید که مجموعه محدود  $Z_{k+1} = \{z_1, \dots, z_m\}$  را تشکیل می‌دهند، دریافت می‌گردند. به‌علاوه، فرض می‌کنیم که  $Z_1, \dots, Z_{k+1}$ :  $Z^{(k+1)}$  است. البته ممکن است بعضی از مشاهدات ناشی از هشدار کاذب<sup>۴</sup> باشند که فرض می‌کنیم ناشی از فرایند پواسن با توزیع فضایی  $C(z)$  و تعداد متوسط هشدار کاذب  $\lambda$  می‌باشند. هر هدف دارای احتمال آشکارسازی  $p_D(\mathbf{x})$  می‌باشد.

برای آن که فرم بسته‌ای از مرحله به‌روزرسانی مشاهدات برای معادلات بازگشتی فیلتر PHD به‌دست آوریم، باید تابع چگالی احتمال چندهدفه پیشین  $f_{k+1|k}(X|Z^{(k)})$  را پواسن فرض نماییم. با این فرض، مرحله به‌روزرسانی مشاهدات به‌صورت زیر در خواهد آمد:

$$D_{k+1|k+1}(\mathbf{x}) \cong L_{Z_{k+1}}(\mathbf{x}) \cdot D_{k+1|k}(\mathbf{x}) \quad (13)$$

که در آن:

$$L_Z(\mathbf{x}) \cong 1 - p_D(\mathbf{x}) + \sum_{p=1}^{|Z|} \frac{p_D(\mathbf{x}) \cdot L_{z_p}(\mathbf{x})}{\lambda c(z_p) + D_{k+1|k} [p_D L_{z_p}]} \quad (14)$$

و  $C(z_p) = \lambda c(z_p)$  بیانگر تابع شدت هشدار کاذب و  $L_{z_p}(\mathbf{x}) = f(z_p|\mathbf{x})$  بیانگر تابع درست‌نمایی<sup>۵</sup> حس‌گر می‌باشند. تابع  $D_{k+1|k}[h]$  بدین نحو محاسبه می‌گردد:

$$D_{k+1|k}[h] = \int D_{k+1|k}(\mathbf{x}) h(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (15)$$

فرض می‌نماییم که تابع شدت از زمان قبل با مجموعه‌ای از ذرات وزن‌دار به‌صورت  $D_{k|k}(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^N w_k^n \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k^n)$  تقریب زده شده باشد. نشان می‌دهیم که چه‌طور از AVMCI می‌توان برای بدست آوردن تقریب تابع شدت در زمان فعلی استفاده نمود. برای راحتی توضیحات می‌توان فرض نمود که تعداد ذرات به‌کاررفته در طول زمان مستقل از تعداد اهداف، ثابت باقی می‌ماند. البته این فرض هیچ خللی در رهیافت ما به‌وجود نخواهد آورد.

اگرچه فیلتر بیزین با معادلات بازگشتی برای حل مسئله MTT راهی بهینه است، تنها برای تعداد اهداف محدودی قابل به‌کارگیری می‌باشد. به‌علت عدم وجود فرضیات ساده‌کننده برای کاهش حجم زیاد محاسبات، این راه‌حل بهینه دارای محبوبیت اندکی برای کارهای عملی می‌باشد. متناسب با فیلتر Kalman با بهره ثابت، در [۱۰] گشتاور مرتبه اول چندهدفه را برای چگالی احتمال چندهدفه بیزین به‌دست آمده است که نام آن چگالی فرض احتمال (PHD) می‌باشد، که به‌صورت زیر از روی چگالی احتمال چندهدفه بیزین تولید می‌گردد:

$$D_\Psi(\mathbf{x}) \cong E[\delta_\Psi(\mathbf{x})] = \int \delta_X(\mathbf{x}) f_\Psi(X) \delta X \quad (9)$$

جایی که  $X$  بردار حالت چندهدفه و  $\mathbf{x}$  بردار حالت یک هدف معین است و  $\Psi$  یک RFS با تحقق  $X$  می‌باشد و  $\delta_X(\mathbf{x})$  به‌صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\delta_X(\mathbf{x}) \cong \sum_{w \in X} \delta_w(\mathbf{x}) \quad (10)$$

که  $\delta_w(\mathbf{x})$  بیانگر تابع ضربه Dirac متمرکز شده در  $w$  می‌باشد. خاصیت منحصر به‌فرد PHD آن است که انتگرال  $D_\Psi(\mathbf{x})$  در هر سطح مشاهده  $S$ ، مقدار اهداف موجود در مجموعه  $\Psi$  در آن سطح را محاسبه می‌نماید:

$$\int_S D_\Psi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = E[|S \cap \Psi|] \quad (11)$$

در [۱۰] نشان داده شده است که فیلتر PHD "بهترین تطبیق" در میان تقریب‌های چگالی احتمال چندهدفه بیزین می‌باشد و علت آن حداقل نمودن Functional اطلاعات KullbackLeibler می‌باشد. همچنین، این فیلتر نیازی به انجام مرحله الحاق داده که مسئله‌ای سخت از نوع غیرخطی<sup>۱</sup> در MTT است [۲]، ندارد.

## ۲-۲- معادلات بازگشتی فیلتر PHD و پیاده‌سازی آن توسط ایده AVMCI

برای بیان معادلات بازگشتی فیلتر PHD، نیازمند چند تعریف اولیه می‌باشیم. احتمال دوام آوردن<sup>۲</sup> یک هدف با حالت  $\mathbf{x}_k$  از زمان  $k$  در زمان  $k+1$  با  $p_S(\mathbf{x}_k)$  نشان داده می‌شود. چگالی شدت زایش اهداف نو نیز با  $b(\mathbf{x})$  به نمایش در می‌آید. چگالی شدت زایش تابعی است که انتگرال آن حول ناحیه مورد مشاهده، تعداد اهداف تازه متولدشده در آن ناحیه را در هر لحظه نشان می‌دهد. نام شدت زایش نیز از همین‌رو بر آن نهاده شده است. با این تعاریف، مرحله پیش‌بینی برای فیلتر PHD به‌صورت رابطه (۱۲) داده می‌شود:

3- Transition density

4- clutter

5- Likelihood

1- NP-hard

2- probability of survival

[۲۷] مطرح شده است.

الف- پیاده‌سازی SIR از فیلتر PHD

برای آن که نشان دهیم که رهیافت بسیار مرسوم پیاده‌سازی SIR از فیلتر PHD که در مرجع [۲۵] توضیح داده شده است، حالت خاصی از AVMCI است، فقط به کنکاش آن بخشی از فیلتر PHD می‌پردازیم که مرتبط با اهداف از قبل موجود می‌باشد. در واقع بحث در مورد اهداف تازه به‌وجود آمده نیز همانند بحث در مورد اهداف از قبل موجود است.

اگر انتخاب ما  $q^p(i) = 1/N, i = 1, \dots, N$  باشد (که این بدین معنی است که  $i^n = n$  و نمایه بالایی  $p$  بیانگر تعلق تابع چگالی احتمال مذکور به اهداف از قبل موجود می‌باشد) و  $q^p(i) = f_{k+1|k}(\mathbf{x} | \mathbf{x}_k^n)$  آن‌گاه با به‌کاربردن AVMCI وزن ذرات برابر خواهند گشت با:

$$w_{k+1|k}^{p,i} = \frac{1}{N} \frac{D_{k+1|k}^p(n^i, \mathbf{x}_{k+1}^i)}{q^p(\mathbf{x}_{k+1}^i | n^i) q^p(n^i)} \quad (21)$$

$$= w_{k|k}^n p_S(\mathbf{x}_k^n) \Theta(\mathbf{x}_{k+1}^i, Z_k)$$

که این دقیقاً برابر با همان وزن ذراتی است که از طریق پیاده‌سازی SIR از فیلتر PHD در مرجع [۲۵] به‌دست آمده است. بخش انتگرالی در مخرج، با شیوه AVMCI به‌طریق زیر محاسبه می‌گردد:

$$\int D_{k+1|k}(\mathbf{x}) p_D(\mathbf{x}) \cdot L_{z_p}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left( \frac{w_{k|k}^n p_S(\mathbf{x}_k^n)}{q(n^i, \mathbf{x}_{k+1}^i)} \right)$$

$$\times f_{k+1|k}(\mathbf{x}_{k+1}^i | \mathbf{x}_k^n) p_D(\mathbf{x}_{k+1}^i) \quad (22)$$

$$\times L_{z_p}(\mathbf{x}_{k+1}^i) + b[p_D \cdot L_{z_p}]$$

$$= \sum_{i=1}^N \left( w_{k|k}^n p_S(\mathbf{x}_k^n) p_D(\mathbf{x}_{k+1}^i) \right)$$

$$\times L_{z_p}(\mathbf{x}_{k+1}^i) + b[p_D \cdot L_{z_p}]$$

که  $b[h] \equiv \int h(\mathbf{x}) b(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$  توجه گردد که جمع آخر در رابطه (۲۲) متعلق به نمونه‌های اهداف تازه متولدشده است که با درنظرگرفتن یک ذره اضافی برای اهداف تازه متولدشده تولید می‌گردند که توضیح دقیق نحوه انجام آن را در بخش ۳-۳ هنگامی که پیاده‌سازی APF را برای فیلتر CPHD شرح می‌دهیم نشان خواهیم داد.

ب- تابع شدت زایش وقتی

رهیافت پیاده‌سازی بهبودیافته SMC برای فیلتر PHD، در مرجع [۲۶]، با نمونه‌برداری از تابع شدت زایش هدف وقتی برای جواب‌دادن به مشکل نمونه‌برداری از تابع شدت زایش با توزیع

ساختار ترکیبی معادلات بازگشتی فیلتر PHD امکان استفاده از AVMCI را فراهم می‌آورد. با قراردادن توزیع گسسته  $D_{k|k}(\mathbf{x})$  در رابطه (۱۲)، چگالی شدت پیش‌بینی‌شده به‌صورت زیر داده خواهد شد:

$$D_{k+1|k}(\mathbf{x}) = b(\mathbf{x}) + \sum_{n=1}^N w_{k|k}^n p_S(\mathbf{x}_k^n) f_{k+1|k}(\mathbf{x} | \mathbf{x}_k^n) \quad (16)$$

که  $b(\mathbf{x})$  بیانگر تابع شدت زایش اهداف جدید است. اکنون تابع  $\Theta(\mathbf{x}, Z_{k+1})$  را به‌صورت زیر تعریف می‌نماییم:

$$\Theta(\mathbf{x}, Z_{k+1}) \equiv (1 - p_D(\mathbf{x}) + \sum_{p=1}^{|Z|} \frac{p_D(\mathbf{x}) \cdot L_{z_p}(\mathbf{x})}{\mathcal{L}(z_p)}) \quad (17)$$

که منظور از  $\mathcal{L}(z_p)$  عبارتست از:

$$\mathcal{L}(z_p) = C(z_p) + D_{k+1|k} [p_D L_{z_p}] = C(z_p) + \int D_{k+1|k}(\mathbf{x}) p_D(\mathbf{x}) \cdot L_{z_p}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (18)$$

با به‌کارگیری روابط (۱۶ و ۱۷) تابع چگالی شدت در زمان حال به‌صورت زیر داده خواهد شد:

$$D_{k+1|k+1}(\mathbf{x}) = \overbrace{b(\mathbf{x}) \Theta(\mathbf{x}, Z_{k+1})}^{\text{PHD of newborn targets} \equiv D_{k+1|k+1}^{\text{new}}(\mathbf{x})} + \sum_{n=1}^N \overbrace{w_{k|k}^n p_S(\mathbf{x}_k^n) \Theta(\mathbf{x}, Z_{k+1}) f_{k+1|k}(\mathbf{x} | \mathbf{x}_k^n)}^{\text{PHD of persistent targets} \equiv D_{k+1|k+1}^{\text{old}}(\mathbf{x})} \quad (19)$$

با مشاهده این امر که جمله  $D_{k+1|k+1}^p(\mathbf{x})$  را می‌توان با ذرات به‌روزشده  $\mathbf{x}_{k+1}^i$  و وزن‌های  $w_{k+1|k+1}^i$  تقریب زد، تابع چگالی شدت  $D_{k+1|k+1}(\mathbf{x})$  را می‌توان برحسب مجموع  $D_{k+1|k+1}^b(\mathbf{x})$  و  $D_{k+1|k+1}^p(\mathbf{x})$  نوشت. جایی که  $D_{k+1|k+1}^b(\mathbf{x})$  توسط تابع چگالی احتمال  $q(\mathbf{x}_{k+1}^i | n^i)$  تولید گشته است. با درنظرگرفتن (۱۷)، هر  $w_{k+1|k+1}^i$  را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$w_{k+1|k+1}^i = \frac{1}{N} \frac{D_{k+1|k+1}^b(\mathbf{x}_{k+1}^i)}{q(n^i, \mathbf{x}_{k+1}^i)} \quad (20)$$

همچنین، جمله  $D_{k+1|k+1}^b(\mathbf{x})$  را نیز می‌توان با روش AVMCI تقریب زد که در بخش‌های ۲-۲ و ۳-۳ توضیح خواهیم داد.

با AVMCI می‌توانیم سه رهیافت مهم در پیاده‌سازی فیلتر PHD را یک‌پارچه نمود. این سه رهیافت مهم به‌ترتیب عبارتند از: (۱) پیاده‌سازی SIR از فیلتر PHD در [۲۵]، (۲) تابع شدت زایش وقتی [۲۶]، (۳) پیاده‌سازی APF از فیلتر PHD که در

با توضیحات فوق، رابطه (۲۳) را می‌توان به صورت زیر نمایش داد:

$$D_{k|k}^b(\mathbf{x}) = b(\mathbf{x}) \sum_{p=1}^{|Z_k|} \frac{L_{z_p}(\mathbf{x})}{\mathcal{L}(z_p)} \quad (27)$$

که از  $|Z_k|$  مولفه متفاوت تولید شده است و هر مولفه  $D_{k|k}^b(\mathbf{x}, i)$  توسط رابطه زیر داده می‌شود:

$$D_{k|k}^b(\mathbf{x}, i) = b(\mathbf{x}) \frac{L_{z_p}(\mathbf{x})}{\mathcal{L}(z_p)} \quad p = \left\lfloor \frac{i}{\rho} \right\rfloor \quad (28)$$

نکته مهم این است که احتمال آشکارسازی اهداف تازه متولدشده برابر با  $p_D(\mathbf{x}^b) = 1$  قرار داده شده است. علت این امر آن است که حالت آن‌ها براساس  $Z_p$  مشاهده در دسترس، نمونه‌برداری شده است و این بدان معنی است که آن‌ها حتما آشکار شده‌اند.

با قراردادن رابطه (۲۵ و ۲۸) در رابطه (۲۶) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} w_{k|k}^{b,i} &= \frac{1}{\rho \cdot m_k} \frac{D_{k|k}^b(\mathbf{x}_k^{b,i}, i)}{q^b(\mathbf{x}_k^{b,i}, i)} \\ &= \frac{1}{\mathcal{L}(z_p)} \cdot \frac{1}{\rho \cdot m_k} \\ &\quad \cdot \sum_{p=1}^{m_k} \sum_{\alpha=1}^{\rho} \left( L_{z_p}(\mathbf{x}_k^{b,(\alpha+\rho(p-1))}) \right) \\ &\quad \times b(\mathbf{x}_k^{b,(\alpha+\rho(p-1))}). \end{aligned} \quad (29)$$

به علاوه،  $\mathcal{L}(z_p)$  دارای انتگرالی است که خود می‌تواند با روش AVMCI محاسبه گردد که نحوه آن را برای قسمتی که مربوط به اهداف تازه متولدشده در رابطه زیر نشان می‌دهیم:

$$\begin{aligned} \int D_{k|k}^b(\mathbf{x}) p_D(\mathbf{x}) L_z(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= \int b(\mathbf{x}) L_z(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{\rho \cdot m_k} \sum_{i=1}^{\rho \cdot m_k} \frac{b(\mathbf{x}_k^{b,i}) L_{z_{[i,\rho]}}(\mathbf{x}_k^{b,i})}{q(\mathbf{x}_k^{b,i}, i)} \\ &= \sum_{i=1}^{\rho \cdot m_k} \sum_{p=1}^{m_k} \sum_{\alpha=1}^{\rho} \left( L_{z_p}(\mathbf{x}_k^{b,(\alpha+\rho(p-1))}) \right) \\ &\quad \times \frac{b(\mathbf{x}_k^{b,(\alpha+\rho(p-1))})}{\rho \cdot m_k} \\ &= \sum_{p=1}^{m_k} \sum_{\alpha=1}^{\rho} \left( L_{z_p}(\mathbf{x}_k^{b,(\alpha+\rho(p-1))}) \right) \times \\ &\quad \times b(\mathbf{x}_k^{b,(\alpha+\rho(p-1))}). \end{aligned} \quad (30)$$

حاصل این رابطه درست معادل رابطه هم‌ارز آن در مرجع [۲۶] می‌باشد.

### ج- پیاده‌سازی APF از فیلتر PHD

اگرچه شیوه‌ای که در اینجا شرح می‌دهیم اندکی با شیوه مطرح‌شده در [۲۷] متفاوت است، هر دو محتوی و ایده یکسانی را دنبال می‌نمایند.

یکنواخت در محیط‌هایی که اطلاعاتی از زایش اهداف نداریم، توضیح داده شده است. متأسفانه برای استخراج روابط به‌دست‌آمده در مقاله [۲۶] قالبی روشمند ارائه نشده است.

اهداف از قبل معلوم در [۲۶] همانند مرجع [۲۵] نمونه‌برداری می‌گردند و تنها بر روی بهبود نمونه‌برداری اهداف تازه متولدشده تمرکز شده است.

همانند رابطه (۱۹) می‌توان PHD اهداف تازه متولدشده را به صورت زیر نوشت:

$$D_{k|k}^b(\mathbf{x}) = b(\mathbf{x}) \Theta(\mathbf{x}, Z_k) \quad (23)$$

که نمایه  $b$ ، بیانگر آن است که روابط برای اهداف تازه متولدشده صادق است.

برای هر  $\mathbf{z}_p \in Z_k$ ، به تعداد  $\rho$  ذره متعلق به اهداف تازه متولدشده تولید می‌نماییم، پس تعداد نمونه‌ها برابر  $N = \rho \cdot m_k$  خواهد بود که در آن،  $m_k = |Z_k|$ ، همچنین، انتخاب می‌کنیم  $q^b(n) = \frac{1}{\rho \cdot m_k}$  که منتجه  $n^i = i$  خواهد گشت. ذرات اهداف تازه متولدشده  $\mathbf{x}_k^{b,i}$  را مطابق با  $m_k$  چگالی اهمیتی متفاوت که به صورت زیر تعریف شده‌اند تولید می‌نماییم:

$$\begin{aligned} q^b(\mathbf{x} | i) &\propto L_{z_\gamma}(\mathbf{x}) b(\mathbf{x}), \\ \gamma &= \left\lfloor \frac{i}{\rho} \right\rfloor, i = 1, \dots, \rho \cdot m_k \end{aligned} \quad (24)$$

که  $[a]$  به معنی گردشده  $a$  می‌باشد. با داشتن ذرات اهداف تازه متولدشده  $\{\mathbf{x}_k^{b,i}\}_{i=1}^{\rho \cdot m_k}$ ، تابع  $q(i, \mathbf{x})$  به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\begin{aligned} q^b(i, \mathbf{x}) &= \frac{L_{z_\gamma}(\mathbf{x}) b(\mathbf{x})}{\Theta(\mathbf{x})}, \quad \gamma = \left\lfloor \frac{i}{\rho} \right\rfloor \\ \Theta(\mathbf{x}) &= \sum_{p=1}^{m_k} \sum_{\alpha=1}^{\rho} \left( L_{z_p}(\mathbf{x}_k^{b,(\alpha+\rho(p-1))}) \right) \\ &\quad \times b(\mathbf{x}_k^{b,(\alpha+\rho(p-1))}) \end{aligned} \quad (25)$$

باید توجه داشت که نمونه‌های اهداف تازه متولدشده  $\mathbf{x}_k^{b,i}$  همگی دارای وزن‌های مرتبه اول یکنواخت  $1/\rho \cdot m_k$  هستند. آنها یکی پس از دیگری بدین نحو تولید شده‌اند که در ابتدا  $\rho$  نمونه از روی  $L_{z_1}(\mathbf{x}) b(\mathbf{x})$  تولید شده‌اند و سپس  $\rho$  نمونه بعدی از روی  $L_{z_2}(\mathbf{x}) b(\mathbf{x})$  و الی آخر به نحوی که مجموع  $q^b(i, \mathbf{x})$  بر روی تمامی ذرات متعلق به اهداف تازه متولدشده برابر با واحد شود.

وزن‌های ذرات اهداف تازه متولدشده به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$w_{k|k}^{b,i} = \frac{1}{N} \frac{D_{k|k}^b(\mathbf{x}_k^{b,i}, i)}{q^b(\mathbf{x}_k^{b,i}, i)} \quad (26)$$

$$\begin{aligned}
 w_{k|k}^{p,i} &= \frac{1}{N} \frac{D_{k+1|k+1}^p(\mathbf{x}_{k+1}^i, n^i)}{q^p(\mathbf{x}_{k+1}^i | n^i) q^p(n^i)} \\
 &= \frac{1}{N} \frac{p_S w_{k|k}^{n^i} \Theta(\mathbf{x}_{k+1}^i, Z_{k+1})}{w_{k|k}^{n^i} \hat{\Theta}(\boldsymbol{\mu}_{k+1}^{n^i}, Z_{k+1})} \\
 &= \frac{p_S \Theta(\mathbf{x}_{k+1}^i, Z_{k+1})}{N \hat{\Theta}(\boldsymbol{\mu}_{k+1}^{n^i}, Z_{k+1})} \\
 &\quad \times \sum_{\alpha} w_{k|k}^{\alpha} \hat{\Theta}(\boldsymbol{\mu}_{k+1}^{\alpha}, Z_{k+1})
 \end{aligned} \tag{۳۵}$$

تبصره ۱: رهیافت ارائه‌شده در [۲۷] به‌جای کار با انتخاب می‌شود) با  $p(\mathbf{x}_{k+1}, n, \mathbf{z}_p)$  کار می‌نماید. در نتیجه، شیوه مرجع [۲۷] نیازمند انتخاب دو نمایه می‌باشد: (۱) نمایه مولفه ترکیب فیلتر PHD از لحظه قبل، و (۲) نمایه مشاهده از مجموعه محدود  $Z_k$ .

تبصره ۲: برای محاسبه تابع  $\Theta(\mathbf{x}_{k+1}, Z_{k+1})$  نیازمند محاسبه بخش انتگرالی  $D_{k+1|k} [p_D L_{z_p}]$  از  $\mathcal{L}(\mathbf{z}_p)$  در رابطه (۱۸) می‌باشیم. در مراجع [۱۰ و ۲۵]، این کار توسط ذراتی که فیلتر PHD پیش‌بینی‌شده را تقریب می‌زدند انجام پذیرفته است. از آن‌جایی که در رهیافت ما دو مرحله پیش‌بینی و مرحله به‌روزرسانی، یکی شده‌اند، می‌توان برای محاسبه  $D_{k+1|k} [p_D L_{z_p}]$  از نمونه‌هایی که  $D_{k+1|k+1}(\mathbf{x}_{k+1})$  را شرح می‌دهند به‌صورت زیر استفاده نمود:

$$\begin{aligned}
 D_{k+1|k} [p_D L_{z_p}] &= \int D_{k+1|k}(x) p_D(x) \cdot L_{z_p}(x) dx \\
 &= \sum_{i=1}^N \sum_{\alpha} (w_{k|k}^{\alpha} \hat{\Theta}(\boldsymbol{\mu}_{k+1}^{\alpha}, Z_{k+1}) \\
 &\quad \times \frac{p_S(X_k^{n^i}) p_D(X_{k+1}^i) \cdot L_{z_p}(X_{k+1}^i)}{N \cdot \hat{\Theta}(\boldsymbol{\mu}_{k+1}^{n^i}, Z_{k+1})}) \\
 &\quad + b [p_D L_{z_p}]
 \end{aligned} \tag{۳۶}$$

### ۳- معرفی فیلتر CPHD و استفاده از ایده AV-MCI

#### برای بهبود پیاده‌سازی

مهم‌ترین مزیت فیلتر PHD همانا محاسبه‌نمودن و به‌روزرسانی تخمین تعداد اهداف مورد انتظار در ناحیه مشاهده است که فیلتر PHD را در شمار فیلترهای حذف‌کننده هشدار کاذب قرار می‌دهد. با این‌حال، همان‌طور که در مرجع [۳۱] بحث شده است، خروجی این فیلتر در معرض تغییرات واریانس

باتوجه به مفهوم وزن‌های مرتبه اول در APF، برای محاسبه احتمال هر نمایه مولفه فیلتر PHD، نیازمند محاسبه انتگرالی هستیم که شامل تابع معرفی‌شده در رابطه (۱۷) می‌باشد. در تابع مذکور، نمونه‌های تولیدی  $\mathbf{X}_{k+1}^i$  با میانگین متناظری که از روی تابع چگالی احتمال انتقال حالت  $f_{k+1|k}(\mathbf{x} | \mathbf{x}_k^n)$  محاسبه می‌گردد، جایگزین می‌گردند.

$$\begin{aligned}
 q^p(n) &\propto w_{k|k}^n \int (p_S(\mathbf{x}_k^n) f_{k+1|k}(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{x}_k^n) \\
 &\quad \times \hat{\Theta} \left( E_{\mathbf{x}_{k+1}} \left\{ \mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{x}_k^n \right\}, Z_{k+1} \right) d\mathbf{x}_{k+1}
 \end{aligned} \tag{۳۱}$$

جایی که  $\boldsymbol{\mu}_{k+1}^n$  برابر با میانگین تابع چگالی احتمال انتقال حالت  $f_{k+1|k}(\mathbf{x} | \mathbf{x}_k^n)$  می‌باشد و همچنین:

$$\begin{aligned}
 \hat{\Theta}(\boldsymbol{\mu}_{k+1}^n, Z_{k+1}) &\equiv (1 - p_D(\boldsymbol{\mu}_{k+1}^n) \\
 &\quad + \sum_{p=1}^{|Z|} \frac{p_D(\boldsymbol{\mu}_{k+1}^n) \cdot L_{z_p}(\boldsymbol{\mu}_{k+1}^n)}{\hat{\mathcal{L}}(\mathbf{z}_p)})
 \end{aligned} \tag{۳۲}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathcal{L}}(\mathbf{z}_p) &= C(\mathbf{z}_p) \\
 &\quad + \int \sum_{n=1}^N w_{k|k}^n p_S(\mathbf{x}_k^n) p_D(\boldsymbol{\mu}_{k+1}^n) \\
 &\quad \cdot f_{k+1|k}(\mathbf{x} | \mathbf{x}_k^n) L_{z_p}(\boldsymbol{\mu}_{k+1}^n) d\mathbf{x}
 \end{aligned} \tag{۳۳}$$

ایده نهفته در این رهیافت همانند ایده به‌کاررفته در APF می‌باشد. در APF برای دستیابی به عملکرد بهتر در مقایسه با پیاده‌سازی SIR، ناحیه‌هایی از دامنه تابع چگالی پسین مورد انتخاب قرار می‌گیرد که از دید مشاهدات جاری دارای اهمیت بیش‌تری باشند. در نتیجه وزن‌های مرتبه اول برای اهداف از قبل معلوم با احتمال دوام‌آوردن  $p_S(\mathbf{x}_k^n)$  با توزیع یکنواخت به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$q^p(n) = \frac{w_{k|k}^n \hat{\Theta}(\boldsymbol{\mu}_{k+1}^n, Z_{k+1})}{\sum_{\alpha=1}^N w_{k|k}^{\alpha} \hat{\Theta}(\boldsymbol{\mu}_{k+1}^{\alpha}, Z_{k+1})} \tag{۳۴}$$

انتخاب‌های گوناگونی برای چگالی اهمیتی مناسب جهت انتشار نمونه‌ها وجود دارد [۳۰]. در اینجا، فرض می‌نماییم که از چگالی انتقال حالت  $q^p(\mathbf{x} | n) = f_{k+1|k}(\mathbf{x} | \mathbf{x}_k^n)$  برای نمایه مولفه ترکیب  $n$  استفاده می‌نماییم. با فرض آن که  $p_S(\mathbf{x}_k^n)$  برای تمامی اهداف از قبل معلوم یکسان باشد، وزن‌های اهمیتی از رابطه (۳۵) به‌دست می‌آید:



توجه شود که  $G^{(i)}(x)$  برابر با مشتق  $i$ ام از  $G(x)$  می‌باشد.

ب- به‌روزرسانی مشاهدات

به‌روزرسانی فیلتر CPHD در زمان  $k+1$  جایی که برای تمامی بردارهای حالت  $\mathbf{X}$  و هر مجموعه مشاهدات  $Z = \{\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_m\}$  با  $|Z| = m$ ، توسط رابطه  $D_{k+1|k+1}(\mathbf{x}) \cong L_{Z_{k+1}}(\mathbf{x}) \cdot D_{k+1|k}(\mathbf{x})$  انجام می‌پذیرد که در آن:

$$L_Z(\mathbf{x}) \cong \frac{\sum_{j=0}^m C^{(m-j)}(0) \cdot \hat{G}^{(j+1)}(s[q_D]) \cdot \sigma_j(Z)}{\sum_{i=0}^m C^{(m-i)}(0) \cdot \hat{G}^{(i)}(s[q_D]) \cdot \sigma_i(Z)} \times (1 - p_D(\mathbf{x})) + p_D(\mathbf{x}) \cdot \sum_{\mathbf{z} \in Z} \frac{L_{\mathbf{z}}(\mathbf{x})}{c(\mathbf{z})} \times \frac{\sum_{j=0}^{n-1} C^{(n-j)}(0) \cdot \hat{G}^{(j+1)}(s[q_D]) \cdot \sigma_j(Z - \{\mathbf{z}\})}{\sum_{i=0}^n C^{(n-i)}(0) \cdot \hat{G}^{(i)}(s[q_D]) \cdot \sigma_i(Z)} \quad (39)$$

و همچنین:

$$\hat{G}^{(i)}(x) \cong \frac{G^{(i)}(x)}{G^{(1)}(1)^i} \quad (40)$$

$$G^{(1)}(1)^i = N_{k+1|k}^i$$

جایی که  $G(x)$  و  $C(z)$  به ترتیب PGF های توزیع کاردینال پیش‌بینی  $p_{k+1|k}(n)$  و توزیع کاردینال هشدار کاذب می‌باشند.  $G^{(i)}(x)$  و  $C^{(i)}(z)$  بیانگر مشتق  $i$ ام از  $G(x)$  و  $C(z)$  می‌باشند، بنابراین  $G^{(1)}(1) = N_{k+1|k}$ . همچنین  $\sigma_i(Z)$  توسط رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$\sigma_i(Z) \cong \sigma_{m,i} \left( \frac{D_{k+1|k} [p_D L_{\mathbf{z}_1}]}{c(\mathbf{z}_1)}, \dots, \frac{D_{k+1|k} [p_D L_{\mathbf{z}_m}]}{c(\mathbf{z}_m)} \right) \quad (41)$$

جایی که  $\sigma_{m,i}(y_1, \dots, y_m)$  تابع متقارن ابتدایی<sup>۲</sup> از درجه  $i$  بوده و در آرگومان  $y_1, \dots, y_m$  به‌صورت زیر داده می‌شود:

$$\sigma_{m,i}(y_1, \dots, y_m) = \sum_{S \subseteq U, |S|=i} \prod_{j \in S} y_j \quad (42)$$

جایی که برای درجه صفر از روی تعریف داریم:

$$\sigma_{m,0}(y_1, \dots, y_m) = 1 \quad (43)$$

توزیع کاردینال به‌روز شده نیز توسط رابطه زیر داده می‌شود:

$$p_{k+1|k+1}(n) = \frac{\left( \sum_{j=0}^m C^{(m-j)}(0) \cdot \sigma_j(Z_{k+1}) \cdot \frac{1}{(n-j)!} \cdot \hat{G}^{(j)(n-j)}(0) \cdot s[q_D]^{n-j} \right)}{\sum_{i=0}^m C^{(m-i)}(0) \cdot \hat{G}^{(i)}(s[q_D]) \cdot \sigma_i(Z_{k+1})} \quad (44)$$

بسیار فرار دارد که ناشی از انتشار تقریب گشتاور چندهدفه مرتبه اول آن به‌جای انتشار تابع توزیع پسین چندهدفه کامل بی‌زین می‌باشد.

در [۲۰] بیان می‌شود که تعمیم فیلتر PHD به‌طوری‌که به‌صورت بازگشتی گشتاور آماری مرتبه دوم از روی تابع چگالی احتمال پسین چندهدفه تخمین زده شود چگالی کواریانس تخمین نامیده می‌شود و دارای حجم محسبات بسیار سنگین می‌باشد. یک راه عملی برای ادغام اطلاعات بیش‌تر در راه تخمین آن است که فیلتر از لحاظ تخمین حالت اهداف از گشتاور مرتبه اول ولی از دید تخمین تعداد اهداف از گشتاور های بالاتر استفاده نماید. این همان ایده انتشار فیلتر PHD به‌صورت کاردینالی است که در مرجع [۲۰] بیان شده است و در آن نه تنها تابع چگالی شدت، بلکه کل توزیع احتمال تعداد اهداف در طول زمان انتشار خواهد یافت. فیلتر CPHD تحت مفروضات زیر کار می‌کند: (۱) اهداف در طول زمان مستقل از هم حرکت می‌کنند، (۲) اهداف از قبل معلوم با احتمال  $p_S(\mathbf{x})$  در زمان حاضر نیز حضور خواهند داشت، (۳) اهداف تازه مستقل از اهداف از قبل موجود به‌وجود خواهند آمد، و (۴) توزیع پیشین چندهدفه و فرایند هشدارهای کاذب فرایندهایی IID cluster می‌باشند [۷].

### ۳-۱- معادلات بازگشتی فیلتر CPHD

در ادامه این بخش معادلات بازگشتی شامل مراحل پیش‌بینی و به‌روزرسانی مشاهدات برای فیلتر CPHD نشان داده می‌شوند:

الف- پیش‌بینی

برای تمامی اعداد صحیح مثبت و تمامی بردارهای حالت، چگالی شدت پیش‌بینی به‌صورت زیر داده می‌شود:

$$D_{k+1|k}(\mathbf{x}) = b(\mathbf{x}) + \int p_S(\mathbf{x}') \times f_{k+1|k}(\mathbf{x}|\mathbf{x}') \cdot D_{k|k}(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \quad (37)$$

و تابع توزیع کاردینالی پیش‌بینی شده برابر خواهد بود با:

$$p_{k+1|k}(n) = \sum_{i=0}^n p_B(n-i) \times \frac{1}{i!} \cdot G^{(i)}(1-s[p_S]) \cdot s[p_S]^i \quad (38)$$

که  $p_B(n)$  توزیع کاردینالی اهداف تازه متولد شده است،  $G(x) = G_{k|k}(x)$  تابع تولید احتمال<sup>۱</sup> (PGF) ناشی از توزیع کاردینال از  $f_{k|k}(X|Z^{(k)})$  و  $s[h] = \int h(\mathbf{x})s(\mathbf{x})d\mathbf{x}$ ، جایی که  $s(\mathbf{x}) = N_{k|k}^{-1} \cdot D_{k|k}(\mathbf{x})$  و  $N_{k|k} = \int D_{k|k}(\mathbf{x}|Z^{(k)})d\mathbf{x}$  لازم است

$$\hat{G}^{j(n-j)}(0) = \frac{n! \cdot p(n)}{(N_{k+1|k})^j} \quad (49)$$

توزیع کاردینال می‌تواند برحسب چگالی کاردینال پیش‌بینی شده به صورت زیر بروز گردد:

$$p_{k+1|k+1}(n) = \sum_{j=0}^m ((m-j)! \cdot p_k(m-i) \times \sigma_j(Z_{k+1}) \cdot P_j^n \cdot \frac{q_D^{n-j}}{(N_{k+1|k})^j}) \cdot \frac{p_{k+1|k}(n)}{\Upsilon^{n_0}(Z_{k+1})} \quad (50)$$

جایی که  $\Upsilon^0(Z)$  می‌تواند برحسب احتمالات آشکارسازی اهداف و هشدار کاذب و توزیع کاردینال پیش‌بینی شده همانند آنچه در رابطه (۴۹) نشان داده شده است، حساب گردد. تبصره ۳: اگر هشدار کاذب وجود نداشته باشد، می‌توان به سادگی تحقیق نمود که نحوه نمایش جدید ارائه شده در مقاله حاضر به معادلات بازگشتی ارائه شده در [۳۲ و ۳۳] تبدیل می‌گردد.

### ۳-۲- پیاده‌سازی AVMCI از فیلتر CPHD

ایده اصلی در پیاده‌سازی AVMCI از فیلتر CPHD همانند ایده ارائه شده در پیاده‌سازی AVMCI از فیلتر PHD است که در بخش ۲-۲ ج ارائه شد. به طور کلی در این قالب، چگالی اهمیتی، نمونه‌ها را در فضای با ابعاد بالاتر با نمایه نمودن ذرات به جامانده از مرحله قبلی، تولید می‌نماید.

با این حال، جدا از تفاوت‌های موجود در معادلات بازگشتی فیلترهای PHD و CPHD، روشی که در این بخش می‌خواهیم شرح دهیم کامل‌تر از شیوه مطرح شده در بخش ۲-۲ ج می‌باشد و این به دلیل ارائه راه‌کاری نو هم برای اهداف از قبل معلوم و هم برای اهداف تازه متولد شده می‌باشد.

فرض نماییم که در زمان  $k$  تابع شدت کاردینالی با مجموعه ذرات  $\{\mathbf{x}_k^{(n)}, w_k^{(n)}\}_{n=1}^N$  تقریب زده شده است:

$$D_{k|k}(\mathbf{x}_k | Z^{(k)}) = \sum_{n=1}^N w_{k|k}^n \delta(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_k^n), \quad (51)$$

$$\sum_{n=1}^N w_{k|k}^n = N_{k|k}$$

به علاوه، به مجموعه ذرات  $\{\mathbf{x}_k^{(n)}, w_k^{(n)}\}_{n=1}^N$ ، ذره جدیدی برای حل مسئله زایش اهداف می‌افزاییم که دارای خواص زیر می‌باشد:

$$w_k^{(n+1)} = b[1], \quad f(\mathbf{x} | \mathbf{x}_k^{(n+1)}) = \frac{b(\mathbf{x})}{b[1]} \quad (52)$$

$$p_S(\mathbf{x}_k^{(n+1)}) = 1$$

فیلتر CPHD نتایج تخمینی با واریانس خطای کم‌تر نسبت به فیلتر PHD تولید می‌نماید. بنابراین لازم است که استراتژی پیاده‌سازی موثرتری نسبت به روش موجود، ابداع گردد. در بخش بعدی نمایش جدیدی از معادلات بازگشتی فیلتر CPHD را به دست می‌آوریم که مناسب برای پیاده‌سازی فیلتر CPHD توسط فیلتر APF است.

### ۳-۲- نمایش جدیدی از معادلات بازگشتی فیلتر CPHD

برای بازنویسی معادلات بازگشتی فیلتر CPHD در ابتدا فرض می‌نماییم که احتمال دوام اهداف از قبل موجود و احتمال آشکارسازی اهداف مستقل از حالت اهداف می‌باشد. اگر  $q_D = 1 - p_D$  برای تمامی حالات اهداف یکی باشد، ان‌گاه  $s[q_D] = q_D$  با توجه به این حقیقت که  $C^{(m)}(0) = (m)! p_k(m)$  و  $\hat{G}^{(i)}(q_D) = (N_{k+1|k})^{-i} \cdot \sum_{n=i}^{\infty} P_j^n q_D^{n-i} \cdot p(n)$  می‌توان ساده‌سازی زیر را انجام داد:

$$\sum_{i=0}^m \frac{C^{(m-j)}(0) \cdot \hat{G}^{(i)}(s[q_D])}{(\sigma_i(Z))^{-1}} = \sum_{i=0}^m p_k(m-i) \cdot \frac{(m-i)! \cdot G^{(i)}(q_D)}{N_{k+1|k}^i \cdot (\sigma_i(Z))^{-1}} \quad (45)$$

اکنون با تعریف تابع جدید زیر:

$$\Upsilon^u(Z) = \sum_{j=0}^{|Z|} (C^{(|Z|-j)}(0) \times \hat{G}^{(j+u)}(s[q_D]) \cdot \sigma_j(Z)) \quad (46)$$

به همراه استفاده از نتایج تولید شده در رابطه (۴۶) می‌توانیم  $L_Z(\mathbf{x})$  را به فرم زیر نمایش دهیم:

$$L_Z(\mathbf{x}) \cong \frac{\Upsilon^1(Z)}{\Upsilon^0(Z)} \cdot (1 - p_D(\mathbf{x})) \quad (47)$$

$$+ p_D(\mathbf{x}) \cdot \sum_{z \in Z} \left( \frac{L_z(\mathbf{x})}{c(\mathbf{z})} \cdot \frac{\Upsilon^1(Z - \{\mathbf{z}\})}{\Upsilon^0(Z)} \right)$$

که تابع  $\Upsilon^u(Z)$  به فرم زیر تعریف می‌گردد:

$$\Upsilon^u(Z) = \sum_{j=0}^{|Z|} \frac{(|Z|-j)!}{(N_{k+1|k})^{j+u}} \cdot p_k(|Z|-j) \quad (48)$$

$$\times \sigma_j(Z) \cdot \sum_{n=j+u}^{\infty} P_{j+u}^n \cdot q_D^{n-(j+u)} \cdot p(n)$$

جایی که  $p(n) = p_{k+1|k}(n)$  برابر با توزیع کاردینال پیش‌بینی شده در زمان  $k+1$  می‌باشد. به علاوه می‌توانیم روابط بازگشتی توزیع کاردینال را در رابطه (۴۵) با در نظر داشتن حقیقت زیر ساده‌تر نماییم:

دو بخش  $q(\mathbf{x}|n, Z)$  و  $q(n|Z)$  تشکیل یافته است، می‌توانیم چگالی اهمیتی‌های مختلفی را ارائه دهیم:

الف- پیاده‌سازی SIR از فیلتر CPHD با حالت افزوده‌شده در این چگالی اهمیتی وزن‌های مرتبه اول را برابر با  $q(n|Z) = 1/(N+1)$  انتخاب می‌نماییم، که به معنی آن است که تمامی ذرات از زمان قبلی به زمان فعلی انتشار می‌یابند و رابطه  $q(x|n, Z) = f_{k+1|k}(x|x_k^n)$  برقرار است. اگرچه این چگالی اهمیتی ممکن است شبیه پیاده‌سازی SIR از فیلتر CPHD مطرح‌شده در مرجع [۲۴] باشد، ولی می‌توان تفاوت‌های ما بین آن دو را با نگاه به روشی که پیاده‌سازی SIR از فیلتر CPHD با حالت افزوده‌شده برای انجام نمونه‌برداری اهداف تازه متولدشده می‌پردازد، دریافت.

از آن جایی که تمامی ذرات باید در زمان حاضر بروز گردند، ذره  $N+1$  نباید بیش از یک مرتبه انتشار یابد. بنابراین برای نشان دادن زایش بیش از یک هدف در زمان دچار مشکل خواهد گشت. بنابراین الگوریتم پیاده‌سازی SIR از فیلتر CPHD با حالت افزوده‌شده را برای مقایسه در شبیه‌سازی‌ها به کار نخواهیم گرفت و به جای آن برای مقایسه از همان پیاده‌سازی SIR برای فیلتر CPHD که در مرجع [۲۴] مطرح شده است، استفاده خواهیم نمود.

ب- پیاده‌سازی فیلتر CPHD توسط فیلتر ذره‌ای با متغیر کمکی

در این روش که در مقایسه‌های بخش شبیه‌سازی، از آن با نام ACPHD نام خواهیم کرد، وزن‌های مرتبه اول  $q(n|Z)$  را به نحوی انتخاب نماییم که نمایه انتخاب‌شده از ذرات زمان قبل به بهترین نحوی مشاهدات جاری را توجیه نمایند.

برای این منظور نمونه‌ها را با مقادیر میانگین آن‌ها در رابطه زیر جایگزین می‌نماییم:

$$q(n|Z_{k+1}) \propto \begin{cases} p_s w_{k|k}^n \hat{L}_{Z_{k+1}}(h(\mathbf{x}_k^{(n)})), & n < N+1 \\ b[1] \cdot \hat{L}_{Z_{k+1}}(m_{\text{birth}}), & n = N+1 \end{cases} \quad (57)$$

که  $h(\mathbf{x}_k^{(n)})$  برابر با میانگین چگالی انتقال حالت  $b(\mathbf{x})/b[1]$  برابر با میانگین  $m_{\text{birth}}$  و  $f_{k+1|k}(\mathbf{x}|\mathbf{x}_k^{(n)})$  می‌باشد جایی‌که:

$$\hat{L}_{Z_k}(\mathbf{x}) = \hat{Y}^t(Z) \cdot (1 - p_D(\mathbf{x})) + p_D(\mathbf{x}) \cdot \sum_{z \in Z} \left( \frac{L_z(\mathbf{x})}{c(\mathbf{z})} \cdot \hat{Y}^t(Z - \{\mathbf{z}\}) \right) \quad (58)$$

توجه شود که ما به جای سروکار داشتن با مقادیر حالت این ذره اضافه‌شده، با خواص آن کار خواهیم داشت.

با قراردادن رابطه (۵۱) و (۵۲) در رابطه (۳۷)، مولفه  $n$  ام از چگالی شدت به صورت زیر به دست می‌آید:

$$D_{k+1|k+1}(\mathbf{x}_{k+1}, n) = \begin{cases} w_{k|k}^n L_Z(\mathbf{x}_{k+1}) \cdot p_S(\mathbf{x}_k^n) \\ \cdot f_{k+1|k}(\mathbf{x}_{k+1} | \mathbf{x}_k^n), & n < N+1 \\ L_Z(\mathbf{x}_{k+1}) \cdot b(\mathbf{x}_{k+1}), & n = N+1 \end{cases} \quad (53)$$

بنابراین، باتوجه به شیوه AVMCI، در هر زمان فیلتر CPHD  $D_{k+1|k+1}(\mathbf{x}_{k+1})$  توسط مجموعه‌ای از ذرات و وزن‌های آن‌ها یعنی  $\{\mathbf{x}_{k+1}^i, w_{k+1|k+1}^i\}_{i=1}^N$  به صورت زیر تقریب زده می‌شود:

$$w_{k+1|k+1}^{(i)} = \frac{N^{-1} \cdot D_{k+1|k+1}(\mathbf{x}_{k+1}^{(i)}, n^i)}{q(\mathbf{x}_{k+1}^{(i)} | n^i, Z_{k+1}) q(n^i | Z_{k+1})} \quad (54)$$

برای آن‌که رابطه (۵۴) محاسبه گردد، باید  $p = 1, \dots, |Z_{k+1}|$  را برای  $D_{k+1|k+1} [p_D L_{z_p}]$  کمک ذره اضافه‌شده، این امر برحسب نمونه‌هایی که  $D_{k+1|k+1}(\mathbf{x}_{k+1})$  را تقریب می‌زنند به صورت زیر انجام می‌پذیرد:

$$D_{k+1|k+1} [p_D L_{z_p}] = \int D_{k+1|k}(\mathbf{x}_{k+1}) \cdot p_D(\mathbf{x}_{k+1}) \cdot L_{z_p}(\mathbf{x}_{k+1}) d\mathbf{x}_{k+1} = \sum_{i=1}^{N+1} \left( \frac{w_{k|k}^{(n^i)} \cdot f(\mathbf{x}_{k+1}^{(i)} | \mathbf{x}_k^{(n^i)}) \cdot p_D(\mathbf{x}_{k+1}^{(i)})}{(N+1) \cdot q(n^i, \mathbf{x}_{k+1}^{(i)})} \times \frac{p_s(\mathbf{x}_k^{(n^i)}) \cdot L_{z_p}(\mathbf{x}_{k+1}^{(i)})}{(N+1) \cdot q(n^i, \mathbf{x}_{k+1}^{(i)})} \right) \quad (55)$$

فرض می‌کنیم که مدل فضای حالت غیرخطی زیر برای هر هدفی برقرار باشد:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= h(\mathbf{x}_k) + w_{k+1}, & w_{k+1} &\sim \mathcal{N}(0, Q) \\ \mathbf{z}_{k+1} &= g(\mathbf{x}_{k+1}) + v_{k+1}, & v_{k+1} &\sim \mathcal{N}(0, R) \end{aligned} \quad (56)$$

به نحوی که  $h$  و  $g$  هر دو توابع مشتق‌پذیر باشند، و  $W_k$  و  $V_k$  دو نویز گوسی دارای ماتریس‌های کواریانس  $Q$  و  $R$  می‌باشند. از آنجاکه چگالی اهمیتی  $q(\mathbf{x}_{k+1}^{(i)}, n^i | Z_{k+1})$  خود از

میانگین  $\mathbf{m}_{k+1}$  و ماتریس کواریانس  $\Sigma_{k+1}$  توسط روابط زیر ارائه می‌گردند:

$$\begin{aligned} \Sigma_{k+1} &= \left( Q^{-1} + \left( \frac{\partial g(\mathbf{x}_{k+1})}{\partial \mathbf{x}_{k+1}} \Big|_{\mathbf{x}_{k+1}=h(\mathbf{x}_k)} \right)^t \right. \\ &\quad \left. \times R^{-1} \cdot \frac{\partial g(\mathbf{x}_{k+1})}{\partial \mathbf{x}_{k+1}} \Big|_{\mathbf{x}_{k+1}=h(\mathbf{x}_k)} \right)^{-1} \\ \mathbf{m}_{k+1} &= \Sigma_{k+1} \cdot Q^{-1} h(\mathbf{x}_k) + \Sigma_{k+1} \\ &\quad \times \left( \frac{\partial g(\mathbf{x}_{k+1})}{\partial \mathbf{x}_{k+1}} \Big|_{\mathbf{x}_{k+1}=h(\mathbf{x}_k)} \right)^t \cdot R^{-1} \\ &\quad \times \left( \mathbf{y}_{k+1} + \frac{\partial g(\mathbf{x}_{k+1})}{\partial \mathbf{x}_{k+1}} \Big|_{\mathbf{x}_{k+1}=h(\mathbf{x}_k)} \right. \\ &\quad \left. \times h(\mathbf{x}_k) - g(h(\mathbf{x}_k)) \right) \end{aligned} \quad (60)$$

پس از این‌که نمایه ذره  $n^i$  با نمونه‌برداری از وزن‌های مرتبه اول انتخاب گردید، قدم بعدی انتخاب کردن ما بین  $|Z_{k+1}|$  مشاهده دریافت‌شده برای معطوف-نمونه  $\mathbf{X}_{k+1}$  می‌باشد. راهی را که ما انتخاب نموده‌ایم این است که مشاهده‌ای را برگزینیم که براساس نرم اقلیدسی به مقدار تابع  $g(h(\mathbf{x}_k^{(n^i))))$  نزدیک‌ترین می‌باشد:

$$p^{n^i} = \min_p \left\| \mathbf{z}_p - g(h(\mathbf{x}_k^{(n^i)))) \right\| \quad (61)$$

جایی‌که  $p$  نمایه مشاهده‌ای است که نمونه  $\mathbf{X}_{k+1}$  را در رابطه (60) به خود معطوف می‌نماید. جدول (1) بیانگر تفاوت پیاده‌سازی فیلتر CPHD توسط الگوریتم پیشنهادی ACPHD و mdACPHD از الگوریتم رایج پیاده‌سازی توسط فیلتر ذره‌ای SIR می‌باشد (که در شبیه‌سازی‌ها با نام اختصاری CPHD از آن نام می‌بریم).

جدول (1). بررسی ویژگی‌های انواع گوناگون پیاده‌سازی فیلتر CPHD

نوع الگوریتم پیاده‌سازی	توانایی نمونه‌برداری در ابعاد بالاتر از ابعاد هدف	تعداد متغیر کمکی	پیچیدگی الگوریتم
CPHD	خیر	بدون متغیر کمکی	کم
ACPHD	بله	یک عدد (نمایه اهداف از قبل موجود)	زیاد
mdACPHD	بله	دو عدد (نمایه اهداف از قبل موجود و نمایه مشاهدات جاری)	زیاد

توجه شود که  $\hat{Y}^u(Z)$  دارای رابطه یکسانی همانند  $Y^u(Z)$  می‌باشد با این‌حال تنها تفاوت در نحوه محاسبه مولفه‌های  $\hat{\sigma}_j(Z_k)$  وجود دارد به‌نحوی که برای  $p=1, \dots, |Z_{k+1}|$  داریم:

$$\begin{aligned} \hat{D}_{k+1|k} [p_D L_{z_i}] \\ = p_D \sum_{n=1}^N L_{z_i} (h(x_k^n)) \cdot p_s \cdot w_{k|k}^n \\ + p_D b[1] L_{z_p} (m_{\text{birth}}). \end{aligned} \quad (59)$$

انتخاب چگالی اهمیتی حالت  $q(\mathbf{x}|n, Z)$  می‌تواند به سادگی چگالی انتقال حالت  $f_{k+1|k}(\mathbf{x}|\mathbf{x}_k^n)$  باشد. ما این چگالی اهمیتی را زین‌پس با الگوریتم<sup>1</sup> (ACPHD) یاد خواهیم نمود. تبصره 4: الگوریتم ACPHD از مشکلی که الگوریتم پیاده‌سازی SIR از فیلتر CPHD با حالت افزوده‌شده رنج می‌برد، آسیبی نمی‌بیند. این بدین علت می‌باشد که هنگام زایش هدف جدید، وزن مرتبه اول  $(N+1)$  ام دارای اعتبار به اندازه کافی زیادی در برابر دیگر وزن‌های مرتبه اول خواهد بود که بیش از یک مرتبه انتخاب گردد و بیش از یک هدف تازه متولدشده را نشان دهد.

ج- الگوریتم پیاده‌سازی APF معطوف‌شده به مشاهده برای فیلتر<sup>2</sup> CPHD (mdACPHD)

انتخاب ذراتی از زمان قبل که در مقایسه با ذرات دیگر در زمان فعلی شانس بیش‌تری برای بقا و انتشار دارند به تنهایی کافی نخواهد بود. منتهی هنوز نیازمندیم که با طراحی هوشمندانه تابع چگالی اهمیتی  $q(\mathbf{x}|n, Z_{k+1})$ ، ذرات را در نواحی با چگالی شدت بیش‌تری در زمان فعلی انتشار دهیم. با در نظر گرفتن اطلاعات آخرین مشاهدات دریافت‌شده، الگوریتم mdACPHD را ارائه می‌دهیم که واریانس وزن اهمیتی AVMCI را با انتخاب هوشمندانه چگالی اهمیتی کاهش می‌دهد. البته این الگوریتم دارای انتخاب یکسانی با الگوریتم ACPHD برای وزن‌های مرتبه اول  $q(n|Z_{k+1})$  می‌باشد. در اینجا از شیوه ارائه-شده در مرجع [29] برای ارائه تقریب گوسی از چگالی اهمیتی بهینه بهره می‌گیریم.

با خطی‌سازی  $g(\mathbf{x}_{k+1})$  در  $h(\mathbf{x}_k)$  می‌توانیم مدل مشاهده گوسی خطی را برای ارائه چگالی اهمیتی گوسی  $\mathbf{x}|(n, Z) \sim \mathcal{N}(\mathbf{m}_{k+1}, \Sigma_{k+1})$  به‌دست آوریم، جایی‌که

1- Auxiliary CPHD

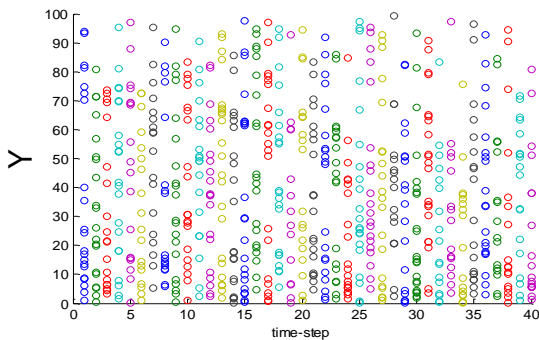
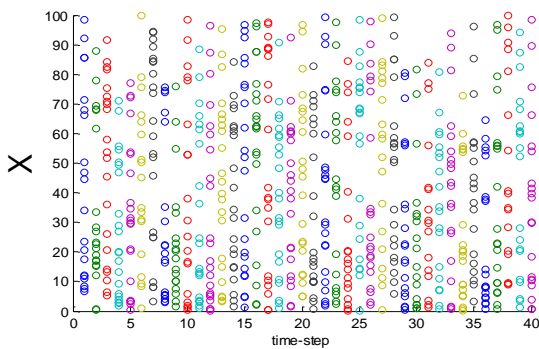
2- Measurement Directed Auxiliary Particle Implementation of the CPHD Filter

## ۴- شبیه‌سازی‌ها

به‌علت گوسی و خطی بودن دینامیک هدف، تابع چگالی انتقال حالت هدف به‌صورت زیر به نمایش در می‌آید:

$$f_{k+1|k}(\mathbf{x}_{k+1}^i | \mathbf{x}_k^i) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_{k+1}^i; F\mathbf{x}_k^i, \Sigma_V) \quad (64)$$

محل شروع حرکت این سه هدف در حوالی نقطه  $m(70, 70)$  می‌باشد. این اهداف در سه مسیر متفاوت از این نقطه دور می‌شوند. هدف اول از لحظه شروع تا زمان ۲۰ در محیط مشاهده وجود دارد. شکل (۱) مسیر بدون نویز سه هدف شبیه‌سازی شده در سناریوی مورد بررسی را با نشان دادن ابتدا و انتهای مسیر هر هدف به‌تصویر می‌کشد.



شکل (۲). مولفه‌های X و Y ناشی از مشاهداتی که هم شامل موقعیت اهداف هستند و هم شامل هشدار کاذب با نرخ متوسط ۲۰ هدف در هر اسکن

هدف دوم در تمامی زمان شبیه‌سازی حضور دارد و سرانجام هدف سوم در زمان ۱۱ به‌صحنه آمده و در زمان ۳۰ ناپدید می‌گردد. سنسور رادار که مشاهدات توسط آن تولید می‌گردد در  $(0, 0)$  واقع شده است و مشاهدات در فاصله زمانی  $T = 1s$  از یک‌دیگر تولید می‌گردند. معادلات مشاهده به‌صورت زیر تعریف می‌گردند:

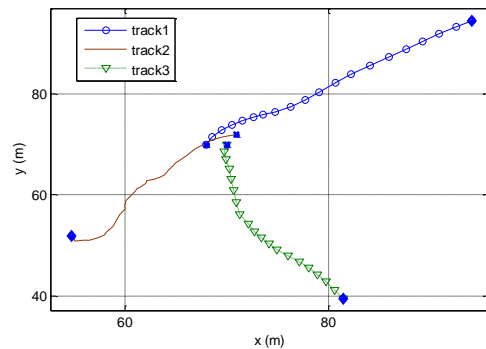
$$\mathbf{z}_k^{(b)} = \arctan\left(\frac{[0 \ 0 \ 1 \ 0] \mathbf{x}_k}{[1 \ 0 \ 0 \ 0] \mathbf{x}_k}\right) + u_{k,b} \quad (65)$$

$$\mathbf{z}_k^{(r)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k + u_{k,r}$$

جایی که  $u_{k,b}$  و  $u_{k,r}$  دو نویز گوسی میانگین صفر و مستقل از هم و با واریانس‌های به‌ترتیب  $\sigma_b^2$  و  $\sigma_r^2$  می‌باشند.

در این بخش، به منظور مقایسه بین عملکرد الگوریتم‌های پیشنهادی این مقاله یعنی mdACPHD و الگوریتم ACPHD برابر الگوریتم مرسوم و رایج پیاده‌سازی SIR برای فیلتر CPHD (که در مرجع [۲۴] مطرح شده است)، سناریویی تشکیل داده شده که در آن به ردگیری اهداف در دوبعد توسط مشاهدات برد و سمت و برای تعداد نامعلوم و در عین حال تغییرپذیر با زمان اهداف پرداخته می‌شود. هشدار کاذب به‌صورت یکنواخت در محیط مشاهده  $[0, 100] \times [0, 100]$  به‌وجود می‌آید. در ادامه نحوه تولید این سناریو را توضیح خواهیم داد. حرکت دینامیک هر هدف، معادله گوسی و خطی زیر را ارضا می‌نماید:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1}^i &= F\mathbf{x}_k^i + V_k, \\ F &= \mathbf{I}_2 \otimes \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ \Sigma_V &= \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & 0 \\ 0 & \sigma_y^2 \end{bmatrix} \otimes \Sigma_{cV}, \\ \Sigma_{cV} &= \begin{bmatrix} \Delta t^3 / 2 & \Delta t^2 / 2 \\ \Delta t^2 / 2 & \Delta t \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (62)$$

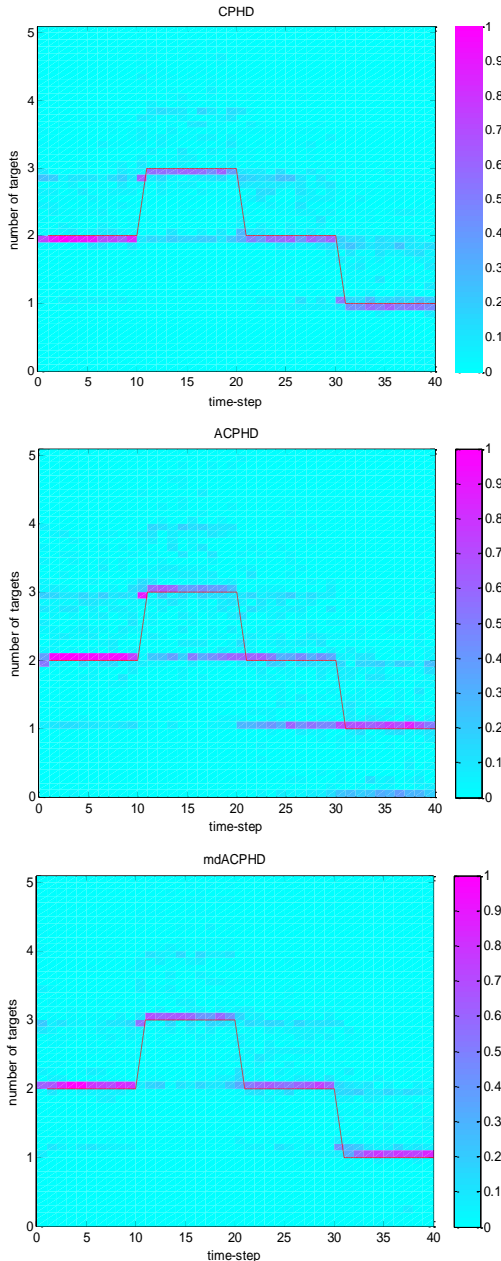


شکل (۱). مسیر اصلی اهداف در طول شبیه‌سازی (لوزی توپر بیانگر نقطه پایان حرکت هدف می‌باشد)

جایی که  $\mathbf{I}_n$  بیانگر ماتریس همانی  $n \times n$ ،  $\otimes$  بیانگر ضرب Kronecker،  $\Delta t$  بیانگر فاصله زمانی نمونه‌برداری، و  $V_k$  یک بردار با میانگین صفر گوسی با ماتریس کواریانس  $\Sigma_V$  می‌باشد. واریانس‌های نویز فرایند  $\sigma_x^2$  و  $\sigma_y^2$  به‌ترتیب مرتبط به نویزهای گوسی فرایندی با میانگین‌های صفر در جهت‌های X و Y می‌باشند. یک هدف نوعی مستقل از دیگر اهداف در طول زمان ظاهر و یا ناپدید می‌گردد و احتمال دوام آوردن آن برابر با  $p_s = 0.95$  بوده و تابع شدت زایش به‌صورت  $\gamma = 0.2\mathcal{N}(\cdot; m_b, \Sigma_b)$  می‌باشد که:

$$m_b = \begin{bmatrix} 70 \\ 0 \\ 70 \\ 0 \end{bmatrix}, \Sigma_b = \mathbf{I}_2 \otimes \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (63)$$

چگالی احتمال پسین چندهدفه در طول ۴۰ نمونه متوالی و برای ۵۰ تحقق مستقل از هم مربوط می‌شود. شکل (۳) تصاویر هیستوگرام نرمالیزه شده از تعداد اهداف را نشان می‌دهد. این تصاویر برحسب جمع وزن‌های اهمیتی تابع شدت اهداف و نه از روی تابع چگالی احتمال کاردینالی به دست آمده‌اند. در کل ۴۰ عدد هیستوگرام برای هر شکل وجود دارد که هر هیستوگرام متعلق به یک واحد زمانی است.



شکل (۳). هیستوگرام نرمالیزه شده از تعداد اهداف تخمین زده شده در الگوریتم‌های CPHD, ACPHD و mdACPHD که هر یک از متوسط‌گیری ۵۰ شبیه‌سازی مستقل به دست آمده‌اند. نمودار نقطه خط تیره بیانگر تعداد اهداف واقعی برحسب محور زمان می‌باشد

هشدار کاذب دارای تابع شدت یکنواخت بر روی  $[0, \pi/2] \times [0, 140]$  می‌باشد. متوسط تعداد نقاط هشدار کاذب برای زمان دریافت مشاهدات برابر با  $\lambda$  می‌باشد. تعداد ذرات و همچنین، واریانس نویز مشاهده  $\sigma_r^2$  در شبیه‌سازی‌ها مقادیر متفاوتی می‌پذیرند.

برای ارزیابی، سناریوی هشدار کاذبی با متوسط ۲۰ رخداد در واحد زمان در نظر می‌گیریم. احتمال آشکارسازی برابر با  $P_D=0.98$  و احتمال دوام هدف در زمان حاضر برابر با  $P_S=0.95$  می‌باشد.

تعداد ذرات برای ردگیری هر تعداد هدف از قبل معلوم و یا تازه به وجود آمده ثابت و برابر با عدد ۳۰۰۰ می‌باشد. این تعداد در هر دو الگوریتم ACPHD و mdACPHD یکسان است.

بردار مشاهده  $Z_{k+1} = (z_1, \dots, z_{m_{k+1}})$  از  $m_{k+1}$  عدد مشاهده که برخی از آن‌ها هشدار کاذبند، تشکیل شده است. شکل (۲) مولفه‌های مشاهدات را در دو جهت  $X$  و  $Y$  برحسب زمان نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌گردد چگالی این نقاط به‌ازای مقادیر مختصاتی نزدیک به مرجع، بیش‌تر است. این بدین دلیل است که توزیع یکنواخت هشدار کاذب در راستای برد و سمت منجر به وجود نقاط بیش‌تری در واحد سطح نزدیک مرجع به نسبت واحد سطح دورتر از مرجع خواهد گشت.

در الگوریتم CPHD، برای هر هدف مورد انتظار، ۳۰۰۰ ذره برای نمونه‌برداری به کار می‌رود و در نتیجه تعداد ذرات مورد نیاز برای نمونه‌برداری در طول زمان شبیه‌سازی متغیرند.

توجه به این نکته مهم است که جدا از تعداد ذرات ثابتی که در هر زمان به تعداد نمونه‌ها برای اهداف تازه متولد شده افزوده می‌گردد، الگوریتم CPHD می‌تواند ۹۰۰۰ ذره در لحظاتی که فکر می‌کند ۳ هدف در محیط مشاهده وجود دارند، داشته باشد و این درحالی است که تعداد کل ذرات برای ACPHD و mdACPHD برابر با مقدار ثابت ۳۰۰۰ می‌باشد. این بدین معنی است که الگوریتم‌های ACPHD و mdACPHD تعداد ذرات کم‌تری برای تخمین تابع شدت اهداف به‌ازای هر هدف در اختیار دارند. همان‌طور که در ادامه خواهیم دید mdACPHD حتی در لحظاتی که سه هدف در محیط مشاهده وجود دارند عملکرد بهتری از CPHD داشته و این برتری این الگوریتم را نشان می‌دهد.

نویزهای سمت و برد دارای انحراف معیارهای به‌ترتیب برابر با  $\sigma_b = 0.002$  و  $\sigma_r = 1.5$  می‌باشند. در زمان نخست، تمامی الگوریتم‌ها دارای ۳۰۰۰ ذره برای نمونه‌برداری از تابع شدت زایش مطرح شده با مشخصات رابطه (۶۳) می‌باشند. اولین بررسی به نحوه تمرکز کاردینال تخمین زده شده از

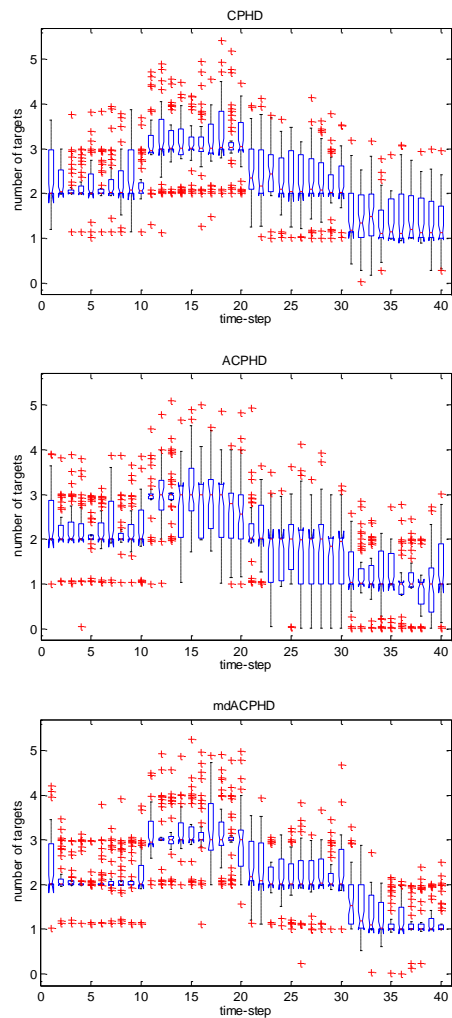
در هر نوار هیستوگرام، هر پیکسل ناحیه‌ای متعلق به تعداد هدفی برابر با ۰.۱ ابهام را نشان خواهد داد و رنگ آن بیانگر میزان تعدد دفعاتی است که الگوریتم مصمم گشته است که تعداد مورد انتظار هدف در آن ناحیه ابهام قرار گرفته است. از آنجایی که این تعداد اهداف هیچ ارتباطی به شیوه‌ای که با آن حالت اهداف استخراج گردیده است ندارد، می‌توان از آن‌ها به‌عنوان معیاری موثر برای ارزیابی نحوه عملکرد پیاده‌سازی‌های گوناگون الگوریتم CPHD استفاده نمود.

نتایج متعلق به mdACPHD نشان‌دهنده تغییرات کم‌تری به‌نسبت الگوریتم‌های دیگر در حول مقدار میانگین کاردینال در هر زمان می‌باشد که این خود بیانگر برتری این الگوریتم بر دیگر روش‌ها می‌باشد.

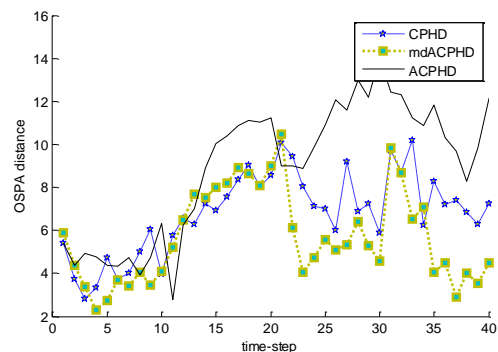
نکته دیگر تغییرات بیش‌تر در هیستوگرام ACPHD نسبت به CPHD می‌باشد. دلیل این امر این است که الگوریتم ACPHD در ابتدا ذرات زمان قبلی را متناسب با میزان نزدیک‌بودن مقدار میانگین چگالی انتقال حالت به آن‌چه مشاهدات زمان حاضر را دلالت می‌نمایند، انتخاب نموده و سپس نمونه‌های زمان حاضر را براساس تابع چگالی انتقال حالت تولید می‌کند. نمونه‌های تولیدشده ممکن است بسیار از مقدار میانگین دور باشند و یا آن‌که از نواحی پر انرژی تابع چگالی اهمیتی پسین استخراج نشده باشند که علت این امر آن است که تابع چگالی انتقال حالت نسبت به مشاهدات زمان حال توجهی نشان نمی‌دهد. از سوی دیگر، CPHD در ابتدا نمونه‌ها را براساس چگالی انتقال حالت تولید نموده و سپس براساس آن‌که چقدر این نمونه‌ها توسط تابع درست‌نمایی تایید می‌شوند در مرحله resampling به آن‌ها وزن داده و پروژن ترین‌ها را انتخاب می‌کند.

برای آن‌که این الگوریتم‌ها را از لحاظ انحراف بالا و پایین حول مقدار میانگین کاردینال تخمین‌زده‌شده مقایسه نماییم، از نمایش box-and-whiskers مقدارهای مورد انتظار اهداف در طول ۴۰ زمان نمونه‌برداری در شکل (۴) استفاده نمودیم. عملکرد mdACPHD در این زمینه نیز بهتر بود، حتی در لحظاتی که سه هدف در محیط مشاهده وجود داشتند و mdACPHD تعداد  $\frac{1}{3}$  ذره کم‌تری را نسبت به CPHD استفاده می‌نمود. نکته مهمی که در اینجا قابل مشاهده است انحراف زیاد عملکرد برای هر سه رهیافت حول زمان‌های زایش یا مرگ اهداف است. دلیل اصلی این امر نیز کندی ذاتی الگوریتم‌های خانواده CPHD در انطباق با هرگونه تغییر تعداد هدف است که در مرجع [۲۴] به آن اشاره شده است.

از آنجاکه مقدار واقعی تعداد اهداف با مقداری که الگوریتم‌ها تخمین می‌زنند لزوماً منطبق نخواهد بود برای محاسبه RMS خطای تخمین موقعیت اهداف نیازمند به‌کارگیری متریکی هستیم که این عدم انطباق را لحاظ نماید. برای همین از فاصله



شکل (۴). نمایش box-and-whiskers از تعداد اهداف تخمین‌زده‌شده در الگوریتم‌های CPHD، ACPHD و mdACPHD که هر یک از متوسط‌گیری ۵۰ شبیه‌سازی مستقل به‌دست آمده‌اند. نمودار نقطه خط تیره بیانگر تعداد اهداف واقعی برحسب محور زمان می‌باشد

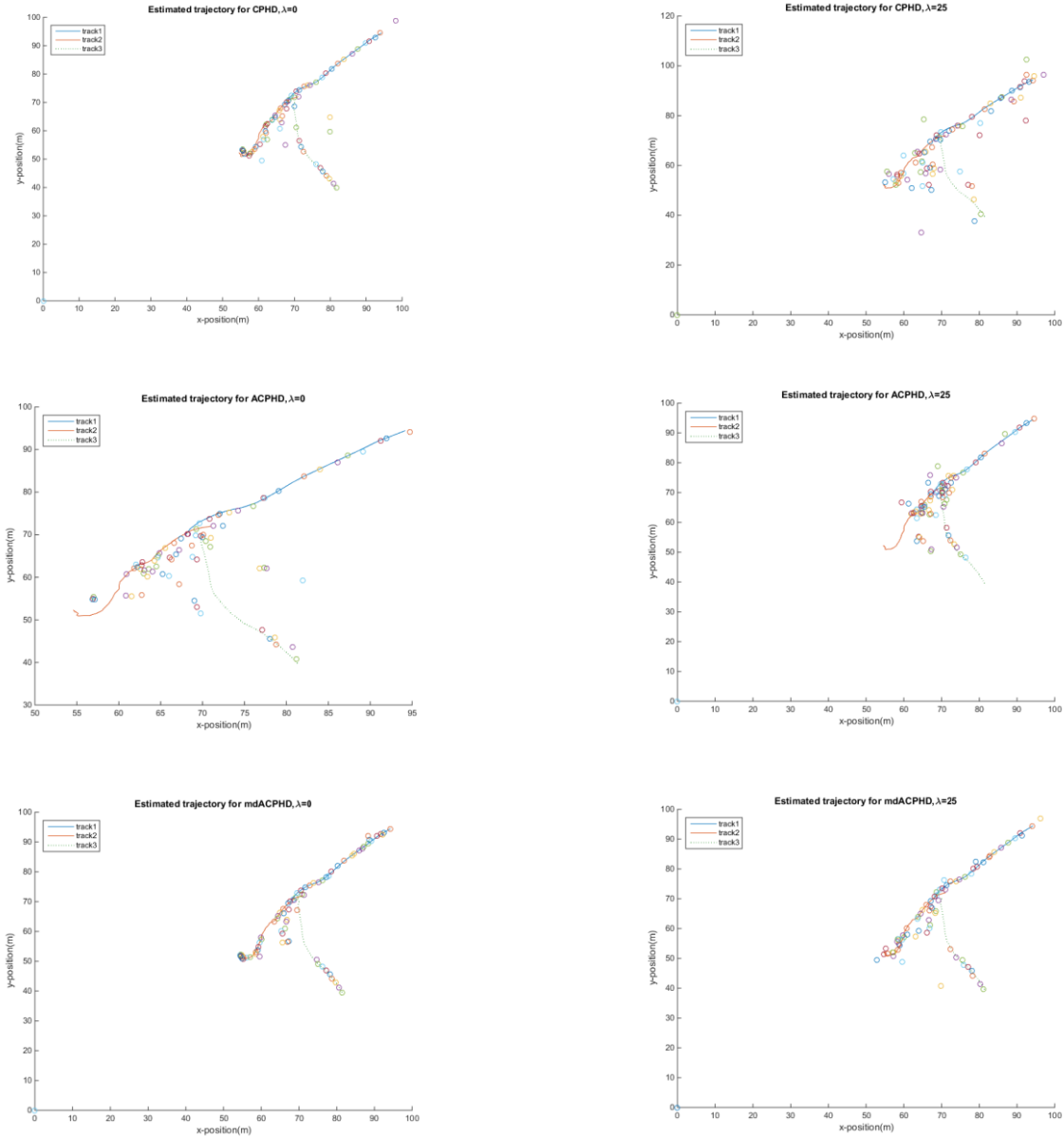


شکل (۵). فاصله OSPA برای الگوریتم‌های CPHD (که در مرجع [۲۴] مطرح شده است)، ACPHD و mdACPHD که بر روی ۵۰ تحقق مستقل متوسط‌گیری شده است. پارامترهای محاسبه OSPA برابر با مرتبه  $p = 1$ ، و قطع (cut-off) برابر با  $c = 30$  انتخاب شده‌اند

حالت اهداف از روی تابع شدت نمی‌باشد. برای این امر از الگوریتم خوشه‌یابی K-means که در [۳۵] مطرح شده است، استفاده می‌نماییم. همان‌طور که در شکل (۵) نمایان می‌باشد، کم‌ترین فاصله OSPA متعلق به فیلتر mdACPHD می‌باشد

اختصاص زیرالگوی بهینه<sup>۱</sup> (OSPA) که در مرجع [۳۴] معرفی شده استفاده می‌نماییم. پارامترهای OSPA برابر با  $p = 1$  و  $c = 100m$  انتخاب گردیده‌اند.

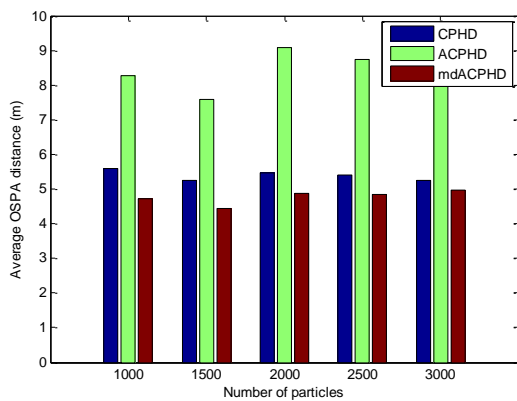
برای محاسبه فاصله OSPA نیازمند محاسبه حالت اهداف می‌باشیم. الگوریتم CPHD به‌خودی خود دارای قابلیت استخراج



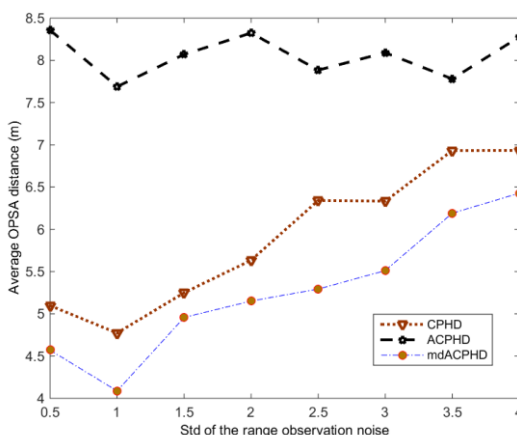
شکل (۶). تخمین‌های (به‌ترتیب از بالا به پایین) الگوریتم‌های CPHD، ACPHD و mdACPHD ناشی از مولفه‌های  $x$  و  $y$  موقعیت اهداف شبیه‌سازی شده (دایره‌های توخالی). در هر نمودار، مسیر حرکت واقعی سه هدف شبیه‌سازی نیز نشان داده شده‌اند. نمودارها ناشی از متوسط‌گیری بر روی ۵۰ تحقق مستقل از هم می‌باشند. نمودارهای سمت چپ برای  $\lambda = 0$  و سمت راست برای  $\lambda = 25$  می‌باشند



تخمین در میان دیگر رهیافت‌ها می‌باشد. در بررسی دیگر، مقدار میانگین فاصله OSPA را برحسب تعداد متوسط نقاط پواسن متفاوت بررسی می‌کنیم. گستره این تعداد از متوسط صفر تا متوسط ۲۵ نقطه در هر اسکن می‌باشد. و انحراف میانگین از نویز مشاهده برد نیز برابر با  $\sigma_r = 1.5$  است و بقیه پارامترهای شبیه‌سازی نیز تغییر نخواهد نمود. نتایج در شکل (۹) به تصویر در آمده‌اند. همان‌طور که مشاهده می‌شود با افزایش تعداد متوسط نقاط پواسن احتمال تخمین کاردینالی درست کاهش می‌یابد و این امر خود موجب افزایش مقدار میانگین فاصله OSPA می‌گردد.



شکل (۷). فاصله OSPA متوسط برای مقادیر مختلف ذرات برای الگوریتم‌های CPHD (که در مرجع [۲۴] مطرح شده است)، ACPHD و mdACPHD. نتایج ناشی از متوسط‌گیری بر روی ۵۰ تحقق مستقل می‌باشند. تعداد متوسط نقاط پواسن در هر اسکن برابر با ۱۰ می‌باشد، و انحراف استاندارد نویز مشاهده برد برابر با  $\sigma_r = 1.5$  می‌باشد



شکل (۸). فاصله OSPA متوسط برای مقادیر متفاوت از واریانس نویز مشاهده برای الگوریتم‌های CPHD (که در مرجع [۲۴] مطرح شده است)، ACPHD و mdACPHD. تعداد نقاط متوسط هشدار کاذب در هر اسکن برابر با ۱۰ و تعداد کل ذرات برابر با ۳۰۰۰ می‌باشند

این بیانگر این حقیقت است که mdACPHD نه تنها در تخمین کاردینال اهداف، بلکه در حوزه RMS خطای تخمین موقعیت اهداف نیز بهتر عمل می‌نماید و موقعیت اهداف را نزدیک‌تر به محل واقعی آن‌ها در مقایسه با آنچه فیلترهای CPHD و ACPHD نشان می‌دهند، تخمین می‌زند. مولفه‌های تخمین‌زده‌شده موقعیت اهداف در جهت‌های X و Y همراه با مقادیر اصلی آن‌ها در شکل (۶) نشان داده شده‌اند. روش تخمین این مولفه‌ها بنحو زیر می‌باشد: ابتدا برای هر تحقق<sup>۱</sup> (یک‌بار اجرای کامل شبیه‌سازی) الگوریتم k-means در هر زمان حالت اهداف را تخمین می‌زند. این عمل به تعداد ۵۰ تحقق مستقل انجام شده و نتایج ذخیره می‌گردند. سپس در هر زمان، دوباره بر روی این نتایج الگوریتم k-means اجرا می‌گردد که نوعی میانگین‌گیری بر روی تخمین موقعیت اهداف است. علت اجرای دومین الگوریتم k-means این است که لزوماً در زمان یکسان تعداد اهداف تخمین‌زده‌شده در دو تحقق مختلف با یک‌دیگر برابر نمی‌باشند و اجرای میانگین‌گیری ساده برای به‌دست آوردن میانگین موقعیت تخمین‌زده‌شده، امکان‌پذیر نخواهد بود. تمامی نمودارهای شکل (۶) بیانگر آن می‌باشند که عملکرد فیلتر mdACPHD برتر از فیلترهای CPHD و ACPHD می‌باشد. فیلتر CPHD نوسان بیش‌تری در تخمین مسیر اهداف از خود نشان می‌دهد که این امر از یک نمونه‌بردار کور<sup>۲</sup> (تابع چگالی اهمیتی انتقال حالت) انتظار می‌رود. درنهایت، ACPHD اندکی بایاس در مسیر اهداف نمایش می‌دهد که منجر به فاصله OSPA بیش‌تری در شکل (۵) خواهند شد.

برای بررسی مقاومت<sup>۳</sup> سه الگوریتم فوق نسبت به تغییرات پارامترهای نویز مشاهده و یا تعداد ذرات نمونه‌برداری، مقدار میانگین فاصله OSPA را برای تمامی طول زمان شبیه‌سازی و با مقادیر پارامترهای متفاوت  $\sigma_r$ ، محاسبه می‌نماییم.

مقدار میانگین فاصله OSPA برای مقادیر متفاوتی از تعداد ذرات در شکل (۷) نشان داده شده است. تعداد نقاط متوسط هشدار کاذب در هر زمان نیز برابر با ۱۰ عدد انتخاب شده است، و انحراف میانگین از نویز مشاهده برد نیز برابر با  $\sigma_r = 1.5$  است، بقیه پارامترها تغییری نخواهند نمود.

در شکل (۸) مقدار میانگین فاصله OSPA برای ۳۰۰۰ ذره و برای واریانس‌های متفاوتی از نویز مشاهده برد رسم شده است. در حالت کلی، mdACPHD بهتر از CPHD و ACPHD عمل می‌کند.

به‌علاوه شکل (۸) نشان‌دهنده این است که به‌دلایلی که در بخش قبلی ذکر شد، الگوریتم ACPHD دارای بدترین عملکرد

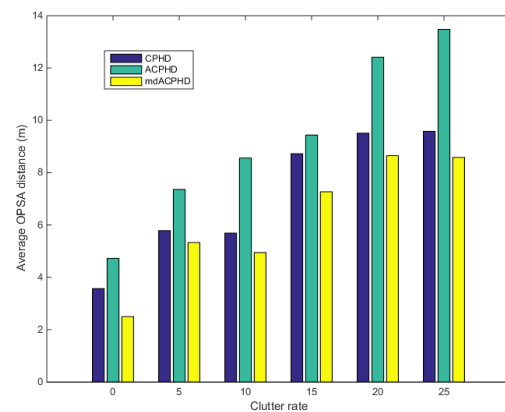
توابع چگالی اهمیتی نمونه‌برداری کردند. ما در این مقاله، با به‌کارگیری ایده AVMCI، این انتگرال‌ها را تقریب زده و مقادیر آن‌ها را برای به‌دست آوردن وزن‌های مرحله اول APF به‌دست آورده‌ایم.

برای بررسی عملکرد دو رهیافت ارائه‌شده ACPHD و mdACPHD با عملکرد الگوریتم CPHD، در شکل (۳) هیستوگرام نرمالیزه‌شده از تعداد اهداف تخمین‌زده‌شده و در شکل (۴) نمایش box-and-whiskers از تعداد اهداف تخمین‌زده‌شده رسم شده‌اند. نتیجه جالب توجه آن است که همان‌طور که نتایج شبیه‌سازی‌ها نشان می‌دهند، اگر انتخاب متغیر کمکی به‌صورت کور و بدون توجه به مشاهدات جاری باشد به‌جای افزایش دقت موجب وخیم‌تر شدن عملکرد تخمین‌گر نیز خواهد شد همانند آن‌چه در الگوریتم ACPHD رخ می‌دهد.

در طرف مقابل، اگر نمونه‌برداری در فضاهای بالاتر جهت انتخاب ذرات از قبل نمونه‌برداری شده با چگالی اهمیتی حالت اهداف که معطوف شده به مشاهدات می‌باشد همراه گردد، همانند آن‌چه در الگوریتم mdACPHD رخ می‌دهد، هم موجب بهبود محسوس عملکرد در محاسبه تعداد اهداف تخمین‌زده‌شده و هم منجر به کاهش فاصله OSPA متوسط نسبت به پیاده‌سازی فیلتر CPHD ذره‌ای SIR خواهد گشت.

## ۶- مراجع

- [1] Y. Bar-Shalom, "Multitarget-Multisensor Tracking: Applications and Advances," Dedham: Artech House, vol. 2, 1992.
- [2] S. Blackman and R. Popoli, "Design and Analysis of Modern Tracking Systems," Artech House, 1999.
- [3] M. Morelande, C. Kreucher, and K. Kastella, "A Bayesian Approach to Multiple Target Detection and Tracking," Signal Processing, IEEE Transactions on, vol. 55, no. 5, pp. 1589–1604, 2007.
- [4] W. K. Ma, B. Vo, S. Singh, and A. Baddeley, "Tracking an Unknown and Time-varying Number of Speakers using Tdoa Measurements: A Random Finite Set Approach," IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 54, no. 9, pp. 3291–3304, 2006.
- [5] B. N. Vo, S. Singh, and A. Doucet, "Random Finite Sets and Sequential Monte Carlo Methods in Multi-target Tracking," In Proceedings of the International Conference on Information Fusion, Cairns, pp. 792–799, 2003.
- [6] H. Sidenbladh, and S. L. Wirkander, "Tracking Random Sets of Vehicles in Terrain," In Computer



شکل (۹). فاصله OSPA متوسط برای مقادیر متفاوت از واریانس نویز مشاهده برای الگوریتم‌های CPHD (که در مرجع [۲۴] مطرح شده است)، ACPHD و mdACPHD. تعداد نقاط متوسط هشدار کاذب در هر اسکن از ۰ تا ۲۵ تغییر می‌نماید

## ۵- نتیجه‌گیری

هدف این مقاله بهبود پیاده‌سازی فیلتر CPHD با استفاده از ایده فیلتر ذره‌ای با متغیر کمکی یا همان APF بود. رهیافت فعلی برای پیاده‌سازی فیلتر CPHD استفاده از فیلتر ذره‌ای معمولی یا همان SIR می‌باشد. درحالی‌که، به‌وسیله استفاده از فیلتر ذره‌ای با متغیر کمکی می‌توان دقت را توسط نمونه‌برداری در ابعادی بالاتر از ابعاد بردار هدف نسبت به فیلتر ذره‌ای SIR افزایش داد. برای آن‌که بتوان ایده فیلتر ذره‌ای با متغیر کمکی را برای پیاده‌سازی فیلتر CPHD محقق نمود از بستری به‌نام الگوریتم AVMCI استفاده نموده‌ایم. در ابتدای این مقاله نشان دادیم که سه رهیافت مهم در بهبود پیاده‌سازی SMC از فیلتر PHD را می‌توان به‌عنوان حالت‌های خاصی از الگوریتم AVMCI در نظر گرفت. سپس برای فیلتر CPHD معادلات بازگشتی را دوباره‌نویسی خواهیم نمود به‌نحوی که مناسب قالب الگوریتم AVMCI باشد و درنهایت ایده فیلتر APF را برای پیاده‌سازی فیلتر CPHD معرفی نمودیم. در پیاده‌سازی APF یک‌بار از تک‌متغیر کمکی نمایه نمونه‌های از قبل تولیدشده برای بهبود دقت استفاده نمودیم که این رهیافت ACPHD نامیده شد و در حالت دوم از دو متغیر کمکی یعنی نمایه نمونه‌های از قبل تولیدشده و نمایه مشاهدات دریافتی برای بالابردن بعد نمونه‌برداری و افزایش دقت تقریب استفاده شد که این شیوه mdACPHD نامیده شده است.

مشکل اساسی در به‌کارگیری شیوه‌هایی پیشرفته‌تر در پیاده‌سازی فیلتر CPHD این است که برای تولید توابع چگالی اهمیتی نیاز به دانستن مقادیر انتگرال‌های خاصی دارد که توسط ذراتی محاسبه می‌گردند که در انتها قرار است توسط خود آن

- Markov Linear Models," In Proc. 9th Intl Conf. on Information Fusion, 2006.
- [20] R. Mahler, "PHD Filters of Higher Order in Target Number," IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, vol. 43, no. 4, pp. 1523–1543, 2007.
- [21] R. Mahler, "A theory of Phd Filters of Higher Order in Target Number," In Signal Processing, Sensor Fusion, and Target Recognition XV, SPIE Defense and Security Symposium, 2006.
- [22] M. Ulmke, O. Erdinc, and P. Willett, "GMTI Tracking Via the Gaussian Mixture Cardinalized Probability Hypothesis Density Filter," IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, vol. 46, no. 4, pp. 1821–1833, 2010.
- [23] B. N. Vo and W. K. Ma, "The Gaussian Mixture Probability Hypothesis Density Filter," IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 54, no. 11, pp. 4091–4104, 2006.
- [24] B. N. V. B. T. Vo, and A. Cantoni, "Analytic Implementations of the Cardinalized Probability Hypothesis Density Filter," IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 55, no. 7, pp. 3553–3567, 2007.
- [25] B. N. Vo, S. Singh, and A. Doucet, "Sequential Monte Carlo Methods for Multi-target Filtering with Random Finite Sets," IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, vol. 41, no. 4, pp. 1224–1245, 2005.
- [26] B. Ristic, D. Clark, B. N. Vo, and B. T. Vo, "Adaptive Target Birth Intensity for Phd and CPHD Filters," IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, vol. 48, no. 2, pp. 1656–1668, 2012.
- [27] N. P. Whiteley, S. S. Singh, and S. J. Godsill, "Auxiliary Particle Implementation of the Probability Hypothesis Density Filter," IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, vol. 46, no. 3, pp. 1427–1454, 2010.
- [28] M. K. Pitt and N. Shephard, "Filtering Via Simulation: Auxiliary Particle Filters," Journal of the American Statistical Association, vol. 94, no. 446, pp. 590–599, 1999.
- [29] A. Doucet, S. Godsill, and C. Andrieu, "On Sequential Monte Carlo Sampling Methods for Bayesian Filtering," Statistics and Computing, vol. 10, no. 3, pp. 197–208, 2000.
- [30] A. Doucet, N. de Freitas, and N. Gordon, "Sequential Monte Carlo Methods in Practice," Springer 2001.
- [31] O. Erdinc, P. Willett, and Y. Bar-Shalom, "Probability Hypothesis Density Filter for Multitarget Multisensor Tracking," In Proc. 8th Intl Conf. on Information Fusion, 2005.
- Vision and Pattern Recognition Workshop, Madison, Wisconsin, USA, pp. 98–98, 2003.
- [7] R. Mahler, "Statistical Multisource Multitarget Information Fusion," Norwood: Artech House, 2007.
- [8] J. Mullane and et al., "A Random Finite Set Approach to Bayesian SLAM," IEEE Transactions on Robotics, vol. 27, no. 2, pp. 268–282, 2011.
- [9] B. Ristic and B.-N. Vo, "Sensor Control for Multi-object Statespace Estimation using Random Finite Sets", Automatica, vol. 46, pp. 1812–1818, 2010.
- [10] R. Mahler, "Multi-Target Bayes Filtering Via First-order Multitarget Moments," IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, vol. 39, no. 4, pp. 1152–1178, 2003.
- [11] M. Tobias and A. Lanterman, "A Probability Hypothesis Density based Multitarget Tracking with Multiple Bistatic Range and Doppler Observations," Proc. IEE Radar Sonar and Navigation, vol. 152, no. 3, pp. 195–205, 2005.
- [12] D. Clark, I. T. Ruiz, Y. Petillot, and J. Bell, "Particle Phd Filter Multiple Target Tracking in Sonar Image," IEEE Transaction on Aerospace and Electronic Systems, vol. 43, no. 1, pp. 409–416, 2007.
- [13] N. Ikoma, T. Uchino, and H. Maeda, "Tracking of Feature Points in Image Sequence by SMC Implementation of the Phd Filter," in Proc. SICE Annual Conference., pp. 1696–1701, 2004.
- [14] D. Clark, and J. Bell, "Bayesian Multiple Target Tracking in Forward Scan Sonar Images using the PHD Filter," Proc. IEE Radar Sonar Navigation, vol. 152, no. 5, pp. 327–334, 2005.
- [15] G. Battistelli, L. Chisci, S. Morrocchi, F. Papi, A. Benavoli, A. Farina, and A. Graziano, "Traffic Intensity Estimation Via PHD Filtering," In Proceedings of the 5th European Radar Conference, Amsterdam, Netherlands, pp. 340–343, 2008.
- [16] H. Sidenbladh, "Multi-target Particle Filtering for the Probability Hypothesis," In Proc. Int'l Conf. on Information Fusion, Cairns, Australia, pp. 800–806, 2003.
- [17] R. R. Juang, A. Levchenko, and P. Burlina, "Tracking Cell Motion using GM-PHD," In International Symposium on Biomedical Imaging, pp. 1154–1157, 2009.
- [18] E. Maggio, E. Piccardo, C. Regazzoni, and A. Cavallaro, "Particle PHD Filter for Multi-target Visual Tracking," in Proceedings of IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP), Honolulu, Hawaii, pp. 1101–1104, 2007.
- [19] A. Pasha, B. N. Vo, H. Tuan, and W. K. Ma, "Closed Form Solution to the Phd Recursion for Jump

- [32] E. Pollard, B. P. Onera, and M. Rombaut, "Hybrid Algorithms for Multitarget Tracking using MHT and GM-CPHD," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 47, no. 2, 2011.
- [33] D. Franken, M. Schmidt, and M. Ulmke, "Spooky Action at a Distance in the Cardinalized Probability Hypothesis Density Filter," *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 45, no. 4, pp. 1657–1664, 2009.
- [34] D. Schuhmacher, B. T. Vo, and B. N. Vo, "A Consistent Metric for Performance Evaluation of Multi-object Filters," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 56, no. 8, pp. 3447–3457, 2008.
- [35] J. Hartigan, "Clustering Algorithms," New York: Wiley, 1975.